第17卷第2期
2008年4月
数学教育学报
JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION
Vol.17, No.2
Apr., 2008

关于"现实数学"和"数学现实"

张奠宙[1]，林永伟[2]

（1．华东师范大学 数学系，上海 200062；2．杭州师范大学，浙江 杭州 310036）

摘要：在数学教学中强调联系学生的现实，是我国当前数学教学改革的一个重点．数学教学除了联系学生的生活现实之外，需要联系学生的"数学现实"．数学现实具有整体性、实践性和个体性．学生的数学现实大致可以分为4种类型：模拟型数学现实、程序型数学现实、论证型数学现实和思想型数学现实．

关键词：现实数学；数学现实；课程标准

中图分类号：G421 **文献标识码**：A **文章编号**：1004-9894（2008）02-0001-04

晚近以来，数学教学中出现了"现实数学"和"数学现实"两个不同的名词．本文希图对这二者间的区别和联系做一剖析，并着重探究"数学现实"对数学教学的重要意义．

1 "现实数学"和"数学现实"的提出

在数学教学中强调联系学生的现实，是我国当前数学教学改革的一个重点．《9年义务教育数学课程标准（实验稿）》指出："学生的数学学习内容应当是现实的、有意义的、富有挑战性的，这些内容要有利于学生主动地进行观察、试验、猜测、验证、推理与交流等数学活动．"这意味着要求所有的数学内容必须是现实的．现实一词，常常意味着"客观现实"、"生活现实"．因此，许多阐述性的文字，就明确提出让学生学习"现实数学"：

新一轮课程改革中，数学教学由关注学科知识传授转变为关注促进人的全面发展．因此在数学课堂教学的过程中，要组织和选择现实的、有趣的、具有探索价值的数学问题，呈现学习材料，积极引导学生学习"现实的数学"，促进学生数学学习方式的转变[1]．

当前对小学数学课程的要求也转向工具性、实用性和生活化，要求充分展示数学问题的实际背景，突出数学与实践的关系．也就是说，新的数学课改已经改变过去的数学精英教育，转而注重学生掌握现实数学，注重形成学生各自的数学现实[2]．

这里的"现实数学"，实际上专指"工具性、实用性、生活化"，即数学教学要联系的是"生活现实"．创设日常生活情景进行教学，已经形成一种风气．这对提高学生学习数学的兴趣，掌握数学的来源，理解数学抽象的原型，很有好处．但是，过度强调数学的生活化，以为一切数学都是从日常生活中发源的，则是一种片面的认识．数学源于真实的现实之后，就会相对独立地由内部问题的驱动进行一段抽象的发展．与此相似，学生学习数学，通过不断地联系日常生活现实，进行数学抽象，用现实生活的需要理解数学、探究数学．然而，学生的头脑里，不会停留在日常生活现实的范围内，而会相对独立地、按照数学内部的规律构建自己的数学认知体系．

一个简单的例子是"质数"的概念．它不能源于任何日常生活，并非来自客观现实的数学，而是数学内部问题驱动的结果．由此可以发展为庞大精致的数论学科，产生像歌德巴赫猜想那样深刻的数学问题．从教学上看，当学生构建起"质数"概念之后，我们才可以有质因数分解，最小公倍数等概念的探究．如果强求数学必须是"现实的"，而且是生活化的现实，那么即使小学数学教学也难以顺利进行．

于是，关于数学教学联系现实的理念，需要作一些修正．在课程标准的修订过程中，我们注意到"数学现实"的提法：

"学生的现实主要包含以下3个方面：（1）生活现实，（2）数学现实，（3）其它学科现实．"

关于"数学现实"的诠释是：

"随着数学学习的深入，学生积累的数学知识和方法就成为学生的"数学现实"．这些现实应当成为学生进一步学习的素材．选用这些素材，不仅有利于学生理解所学知识的内涵，还能够更好地揭示相关数学知识之间的内在关联，有利于学生从整体上理解数学，构建数学认知结构．例如，因式分解知识的引入可以借助整数的分解，平行四边形概念的引入可以借助三角形，等等．"

这一提法，在历来的"数学教学大纲"和《数学课程标准（实验稿）》中都没有出现过，因而是一个值得研究的新课题．

2 "数学现实"的界定

就"数学现实"这一名词来说，我们并不陌生．20世纪最伟大的数学教育家弗赖登塔尔曾经提出过"数学现实"：

"每个人都有自己生活、工作和思考着的特定客观世界以及反映这个客观世界的各种数学概念、它的运算方法、规

收稿日期：2008-01-03

作者简介：张奠宙（1933—），男，浙江奉化人，教授，国际数学教育委员会（ICMI）执行委员（1995—1998），国际欧亚科学院院士，教育部师范司高师数学改革指导委员会委员，教育部师范司"学科教育研究"专家组成员，《数学教学》主编，主要从事数学教育研究．

律和有关的数学知识结构."[3]

这个定义，比较全面地反映了"数学现实"的涵义，可以为我国课程标准的修订提供重要的参考."数学现实"具有以下的特性.

首先，数学现实具有整体性.数学现实是一种认知结构，体现了数学知识之间的内部关联.应该指出，数学现实不只是产生数学知识前后的逻辑连接.如果以为"数学现实"只是为讲新课所必须的"预备知识"，那就太狭隘了."数学现实"包括已知的"知识"，还包括数学思想方法，数学规律的把握，数学抽象能力等.

例如，在引入"函数"概念的时候，当然应该有"文字符号"、"等式"、"解析式"这样的数学知识准备，但更重要的是要有"对应"、"关系"、"唯一"等数学思想方法的支撑.至于像"变量"、"相互依赖"这样的字眼，已经涉及先前数学知识所不能覆盖的哲学领域了.因此，函数教学，必须把重点放在学生的数学观念如何从静态发展到动态的"数学现实"上.

再以"因式分解"的数学现实而言，数的分解固然属于"数学现实"，但是更重要的是联系"分解"的意义和价值.这涉及"整体和部分"、"简单和复杂"这样的宏观思考.

其次，数学现实具有实践性."数学现实"是从数学角度观察客观世界，并进行思考所获得的知识内容，因而具有很强的实践性质.数学现实中有很大一部分是数学模型.例如"鸡兔同笼"这样的模型，在日常生活现实中是没有的，它只能属于"数学现实".（即使换成3条腿的凳子和4条腿的椅子的问题，仍是一种数学模型，并非生活原型.）现在的数学教学，过度形式化.把数学现实仅仅理解为"形式化的、逻辑化的数学现实"是不正确的.

例如，一节指数函数的课，仅仅联系细胞分裂模型是不够的.我们必须体现"指数爆炸"的意义，特别是将 2^n 和 n^2 作比较，联系已知的幂增长的数学现实，才能把指数函数的特征显示出来，并使得学生在"数学现实"中确立起指数函数的地位.

数学现实的实践性还表现在，数学现实与生活现实的关系具有互通的特点.学生的生活现实可以促成数学现实的形成，反之，学生的数学现实能够帮助学生进一步观察生活现象，发现其中的数学问题以及解决问题的方法，即所谓学会"数学地"思考问题.比如通过"向东向西运动"、"零上零下温度"（生活现实）来形成"相反意义的量"（数学现实），而通过"相反意义的量"来进一步理解"作用力与反作用力"等现实生活现象.

第三，数学现实具有个体性.学生的数学现实，按照他所生活的环境，是一个属于学生个体的、变化的、发展的动态系统.这当然和学生的个体有关.在个别指导时，当然要符合该学生的数学现实，在班级授课时，则要顾及学生的年龄特征，城乡生活环境，普遍认知水平等因素.

例如，同样是讲鸡兔同笼，小学生是用算术方法（让兔子站起来等），中学生则用代数方法（二元一次方程的整数解）.同样是进行高度测量，城市用"电视塔"为目标，农村则可能用佛塔或大树.少数民族地区使用的帐篷中的数学内容，更是特定的数学现实.

另外，学生的数学现实与数学理论（即数学教学目标）之间存在一个"中间地带"，相当于维果斯基所提出的"最近发展区"[4].对于某些学生来说，其数学现实已经进入"最近发展区"，甚至进入"教学目标"区域，而对另一些学生来说其数学现实还没能触及"最近发展区"（如图1）.因此结合"数学理论"和"最近发展区"来考察、分析学生的"数学现实"是有益的.

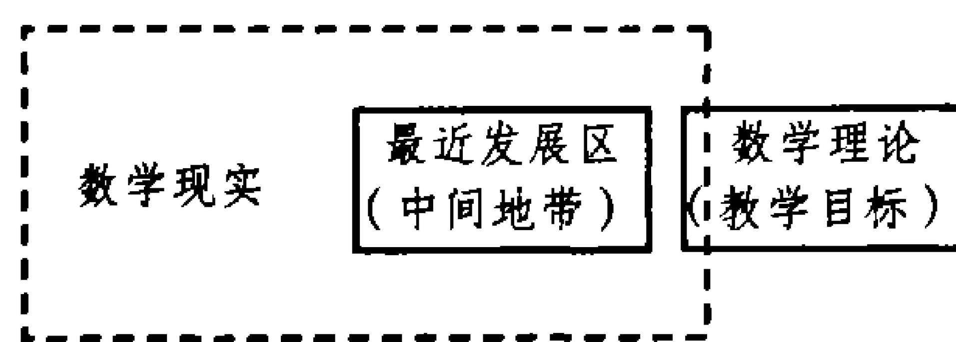


图1 最近发展区示意图

3 "数学现实"内涵的层次

学生的数学现实，从具体到抽象，可以分成若干层次.我们认为，大致可以分为4种类型.

3.1 模拟型数学现实

考虑到直接生活经验与数学形式理论之间的差距，人们经常通过想象或适度抽象，人为地"创造"出一些问题模型或情境模型，这类模型既不是生活现实原型，当然也不是完全形式化的数学原理，而是介于两者之间的那种数学形态.我们称之为模拟型数学现实.

例如，模拟"孙子问题"："今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何?"这并不是生活现实原型，人们不可能这样数数，也不是一次同余式解的一般原理，它类似于一种数学游戏.几何中的尺规作图，也是生活中少有、具有操作价值的模型.

再如相似形教学中"巨人的手"的教学设计，"黑板上留下巨人的手印，请你为巨人设计他使用的书籍、桌子和椅子的尺寸".这是一个并非来自生活实际、仅凭想象的情境模型，但也还没上升到"相似形对应边成比例"的一般原理，它也是一种模型.对于这类模型，学生可以长期存留在记忆之中，随时可以调用，成为推动数学问题思考的一种数学现实.

3.2 程序型数学现实

数学中有相当一部分知识属于程序性的知识，它往往表现为一些运算法则、规定以至口诀.这些需要熟记的知识，可以忘掉原型，随手拿来就运用.可以说已经化作人们的一种数学直觉.例如，九九表的乘法口诀，先乘除后加减，从内到外脱括弧，除以分数即"颠倒相乘"，有理数乘法服从"负负得正"等，都已经变成人们认为"理所当然"的真理.

这样的例子很多. 例如，正弦、余弦的"和角公式"，证明起来很繁琐，但是由于不断地使用，可以信手写来，不记得证明过程. 前面提到的"数的因数分解"，也是一种程序，学生往往会分解，记不得其证明. 但是，它确实已经是学生确认了的数学现实.

这种程序性的"数学现实"，具有很强的真理性. 一旦新的数学知识与这些程序、规则、算法相联系，就会觉得是联系到自己已经非常熟悉而完全可以接受的现实.

3.3 论证型数学现实

数学中由概念、定理、性质、原理构成的理论框架，如果被学生所"掌握"，因其表达精确、逻辑严密、结构完整，可称为论证型数学现实.

理论型数学现实长期以来一直被作为数学教学的重点，对其进行承接式推进、阶梯式提高、螺旋式上升等处理方式在教学上已被广泛运用. 采用化归、迁移、类比、同化等手段对"数学现实"进行连续不断地"建构"已是数学教师运用娴熟、学生也予以普遍接受的教学方式.

在联系论证型数学现实时，要特别注意学生的理解水平. 以"掌握"三角形中位线定理为例，一些学生只能将它运用于三角形，另一些学生能够运用于稍微复杂的图形中，如平行四边形、梯形，还有一些学生则可以运用于更为复杂的情况之中（如图2），应当运用变式教学分别对待.

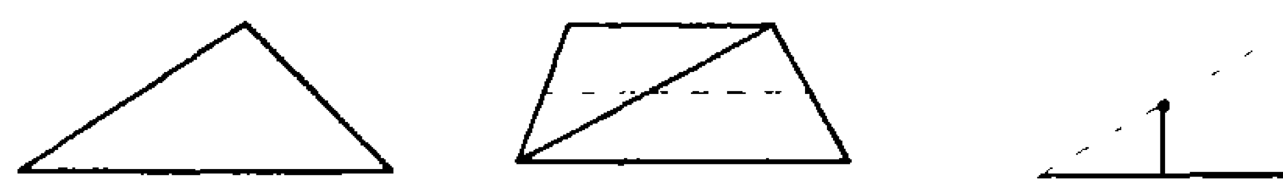


图2　三角形中位线

3.4 思想型数学现实

数学作为一种文化，有其深刻的思想内涵. 这些思想内容经由教师的传导和启迪，加上学生自身的感悟，通过数学活动、逻辑思考、问题解决等一系列方式或多或少在学生思维中得以积累而形成的数学现实，被称为思想型数学现实.

学生的思想型数学现实有些是可以"言传"的，如"化归"思想、对应思想、分割思想等；有些却不能"言传"，只能"意会"，如数学直觉、数学灵感，但我们可以确信学生头脑中存在这类难以用言语表达的数学思维形态.

例如，学生经过几何变换的学习形成的"以运动的观点处理几何问题"这一数学观点就属于思想型数学现实，由直观的表象予以支撑. 但是，函数的极限是一个无限过程，只能存在于想象之中，成为一种意境.

4 运用"数学现实"进行教学的案例

运用"数学现实"进行数学教学，最容易想到的是复习旧课，用已知数学知识为新课做铺垫. 但是，我们还应该有更深入的探索. 以下是几个有关的案例.

[案例一]因式分解

有的教案，直接写出因式分解的定义，然后举例、练习. 以训练因式分解的技能为主要诉求. 这样设计，解题效率高. 但是，教学毫无生气，形式化的处理，让学生不知道知识的发生过程. 课讲得再清晰、准确，也是冰冷的美丽.

现在让我们来联系学生的现实.

首先是联系日常生活现实：分解，是为了使问题由复杂到简单，便于研究. 玩积木、七巧板，每一个复杂的图形都是由简单的图形构成的；学校的学生，先分成年级，再分成班级，分解的目的，是为了管理方便.

然后是联系其它学科现实：物质可以分解为化学元素. 水的分子式是 H_2O，即可以分解为氢气和氧气.

至于联系数学现实，还有3个层面. 一是要联系小学里学过的数的质因数分解. 例如 $210=2\times3\times5\times7$，其中，2，3，5，7都是质数，即不能再分了. 二是要联系学生头脑里的数学思想方法（类比），已有的"质因式分解"（平方和公式，平方差公式），以及 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. 这样，终于过渡到一般的因式分解. 第三，还要关注"综合"与"分解"的对立统一关系，提升学生的数学现实.

通过多方面地联系各种现实，让学生在知识发生过程中进行"火热的思考"，实现"再创造". 学生的数学学习，才能够生动活泼，感受数学的魅力和价值.

[案例二]二项式定理

作为数学法则的二项式定理，没有生活现实可以联系. 完全依靠联系学生的抽象数学现实. 主要涉及以下几层"联系".

从简单到复杂的联系：由最简单的平方项展开 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，到正整数次幂形式 $(a+b)^n$ 猜想.

其它学科现实：数学历史人物（事件）的联系：从贾宪（杨辉）的贾宪三角（杨辉三角）到帕斯卡三角阵，再到牛顿的有理指数幂的二项式定理等.

数学理论现实：数学归纳法的证明.

[案例三]方程概念

方程概念的教学程序通常是导入、定义、举例辨认、练习、总结，给人的感觉是过于表面化处理. 甚至让学生背诵"含有未知数的等式叫方程"，这样的定义缺乏数学现实的支撑，不知道为什么要研究它，好像是"天上掉下来"的. 如果联系"学生现实"，则情况将大有改观.

我们把方程理解为："为了求未知数，在未知数和已知数之间建立的等式关系."于是，可以在以下层面进行联系.

生活现实层面：已知、未知、关系，都是普通名词. 其中，关系是关键词.

概念性数学现实：用等式形容关系. 相等是关键词.

思想方法型数学现实：通过等式把已知、未知联系起来，目的是为了找出未知数. 这和请熟人介绍认识新朋友的道理一样.

程序型数学现实：式的运算规则，施行同解变换，求得未知数.

这样的联系，帮助学生把方程概念植入自己的认知结构.

[案例四]勾股定理

学习勾股定理时，学生大多听说过勾股定理，也知道"三个平方"的公式. 如果简单重复，不能激起学生的学习兴趣.

我们可以进行如下的"联系数学现实"设计.

联系模拟型数学现实：折纸、拼图，了解定理的来源.

商高（西周时期）折矩，即把矩形（边长为 3、4）沿对角线对折（如图 3）.

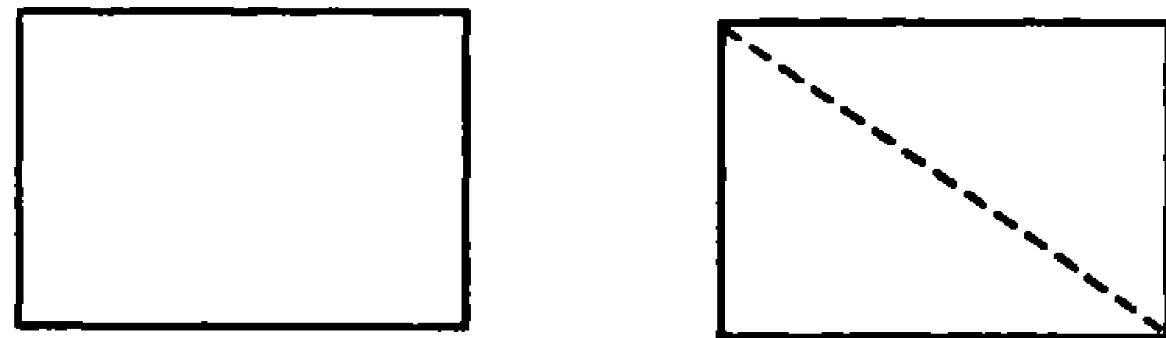


图 3 折纸示意图

接着用 8 个"半矩形"（直角三角形）进行拼图（如图 4）.

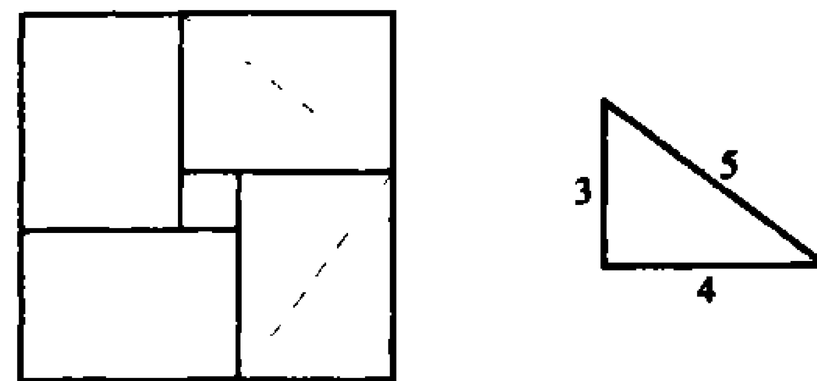


图 4 拼图示意图

联系理论型数学现实：矩形、正方形、直角三角形的概念及相互关系，体验定理发现过程：图 4 中虚线形成的是一个正方形. 商高计算了虚线正方形的面积 $(3\times4)\times2+(4-3)^2=25=5^2$，但是 $3^2+4^2=25$，所以 $3^2+4^2=5^2$，由此猜想："在直角三角形中，两个直角边平方之和等于斜边的平方."

丰富数学现实：中外其它相关历史故事、外星人联系使用的信息以及费马大定理 $a^n+b^n=c^n\ (n\geqslant3)$ 等，让学生全面地感受定理的意义，欣赏勾股定理的美学价值，使学生的数学现实丰满起来.

[参 考 文 献]

[1] 潘海燕. 呈现数学现实 促进数学学习[M]. 教学月刊（小学版），2006，(8)：12.

[2] 马家安. "新课改下小学数学教师应具备基于问题解决的现实数学观" [W]. http://www.pep.com.cn/ kcs/kcyj/kcll/ kcda/200402/t20040223_78199.htm，2004-02-23.

[3] Hans Freudenthal. 数学教育再探——在中国的讲学[M]. 上海：上海教育出版社，1999.

[4] 王道俊，王汉澜. 教育学[M]. 北京：人民教育出版社，1989.

[5] 汪晓勤. 中学数学中的数学史[M]. 北京：科学出版社，2002.

[6] 林永伟，叶立军. 数学史与数学教育[M]. 杭州：浙江大学出版社，2004.

On "Realistic Mathematics" and "Mathematical Reality"

ZHANG Dian-zhou[1], LIN Yong-wei[2]

(1. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China;

2. Hangzhou Normal University, Zhejiang Hangzhou 310036, China)

Abstract: Mathematics teaching and learning need to relate with daily live, in addition, we also are required to relate with student's "mathematical reality". In this paper, the authors described the significance and classification of "mathematical reality", and gave some examples.

Key words: realistic mathematics; mathematical reality; curriculum standard

[责任编校：陈汉君]

第17卷第2期 数学教育学报 Vol.17, No.2
2008年4月 JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION Apr., 2008

从数学美感的产生看数学美教学

杨泽忠

（山东师范大学 数学科学学院，山东 济南 250014）

摘要：研究数学美的教学具有重要意义. 从美学的美感理论出发，为了使数学美教学顺利展开，获得好的效果，数学教学中应在采取多给学生展示数学美的特征策略之外，最好选择学生熟悉的数学内容开始；多方面联合增强学生对数学知识的情感；重视知识的“留白”作用，引导学生联想和想象；重视情感的引导和带动；重视成功数学美感经验的回顾和总结等. 另外，教师和学生还应当注意多了解数学美知识和美学知识，注意积累数学美感的体验，选择恰当的时机和环境开展教学.

关键词：数学美；美感；数学教学；情感

中图分类号：G421 **文献标识码**：A **文章编号**：1004-9894（2008）02-0005-03

1 引 言

当前，随着数学教学改革的不断深入，中小学数学教学普遍重视数学美的教学. 之所以这样，一方面是因为数学美本身即是数学的一部分，重视数学美的教学是现代数学教学的要求，另一方面是因为数学美的教学不仅可以提高学生的学习兴趣，调动学生学习数学的积极性，而且还可以增强学生对于数学知识的理解和掌握，培养和发展学生的创造力.

可是，在教学中应该如何给学生讲授数学美呢？怎样讲才能使学生深切体会到数学的美呢？这个问题一直没有比较一致的说法. 目前在中学数学教学实践中，比较多的做法是挖掘数学知识中的对称性、统一性、奇异性和简单性，然后呈现给学生，通过给学生展示数学美的特性来促进学生对数学美的认识和接受. 这种做法是否有效？通过我们几年来对中学数学教学的观察和有关学生的访谈，实事求是地讲，并不理想. 那么如何改进这种状况使学生在学习数学时真正感受到数学美呢？我们认为深入研究数学美的本质，根据数学美感的产生和来源设计教学是必由之路.

2 数学美感及其价值

数学美感是个体的一种主观感受，它是个体接触到数学美之后，自身情感情不自禁的喷发，是个体在数学美的影响下获得的满足感、陶醉感和幸福感.

数学美感对于个体认识数学美具有重要作用. 数学美感是在数学美的诱导下产生的，是数学美的直接结果. 因此，凡体验过数学美感的人对于数学美在态度上一般都会有一个比较大的转变，原来不相信数学美的人开始变为相信，原来对数学美表示怀疑的人再不怀疑. 另外，数学美感是个体的一种满足感、陶醉感和幸福感，这种感觉对于个体来说往往都刻骨铭心. 所以，凡体验过数学美感的人一般都会对数学美有进一步的认识，有着长时间深刻的记忆. 因此，数学教学中激发学生的数学美感是十分必要的. 它对数学美的教学落到实处，起到切实效果有着重大价值.

3 数学美感的产生

数学美感也是一种美感，它与其它美感的不同之处仅在于诱发事物有差别. 其它美感诱发事物可能是山水、花草和音乐等，数学美感的诱发事物是含有对称、统一、简洁等特征的数学知识和对象等. 因此，一般美感的产生理论也适用于数学美感的产生.

根据一般美学理论，美感产生的外在条件是：审美对象和生理健全的审美主体. 美感产生的内在条件是：审美对象能给人以周期性和规律性的感觉；审美主体有关于审美对象丰富的知识；审美主体对审美对象有良好的情感；审美主体有活力，同时情感和想象力都丰富；审美对象和审美主体有一定的距离等. 美感产生的一般过程为：（1）审美主体接触到审美对象，审美对象的有关信息被主体所感觉，主体对审美对象进行认知；（2）审美主体在认知的基础上结合自己的情感产生联想和想象；（3）审美主体的情感在联想和想象之中逐步加强和升华，最后直至高峰，达到忘我陶醉的状态. 在美感产生的过程中影响美感产生进程和程度的因素主要有审美主体的审美能力、审美态度、心理准备、审美环境等.

美感主要有3个特征：潜藏着理性的个体直觉性，以认识为基础的情感性和隐伏着功利的愉悦性[1].

4 数学美教学的基本要求

从数学美感的认识出发，加强数学美的教学，使学生体会到数学美. 我们认为，实际教学不仅应当挖掘数学知识中的对称性、统一性、奇异性和简单性，使数学知识和对象给学生一种和谐对称的视感觉，而且还应遵循如下一些要求：

第一，选择学生熟悉的数学知识讲授数学美，或者对于学生不熟悉的内容最好先让学生完全熟悉之后再进行数学美的教学. 学生对自己熟悉的数学知识一般都会有比较深刻的理解和比较全面的认识，同时，对其的情感也会比较深厚. 由上述数学美感产生的理论出发，用学生比较熟悉的知识来了解数学美，学生在感受数学美的过程中，对这部分内容的感知和认知就比较容易和到位，情感也比较容易升温，因此体会数学美感也会相对容易.

以前我们曾做过一个小实验，让高中学生分别学习勾股定理 $a^2+b^2=c^2$ 和欧拉公式 $e^{i\pi}+1=0$ ，看学生能否体验到其

收稿日期：2007-12-08

作者简介：杨泽忠（1968—），男，山东济南人，副教授，博士，主要从事数学教学和数学史研究.

中的美．结果发现，学生对勾股定理较容易感受到美，认为它很奇妙．对于欧拉公式，尽管有着很好的统一性和奇异性，它将数学中最常用的5个常数0、1、i、e、π用极为简单的方式联系到了一起，在历史上受到过很多人的赞美，但是，由于学生不了解这个公式的由来和其中包含的高等数学知识，绝大多数学生对这个公式反应漠然．

台湾师范大学数学系的谢佳叡老师于2000年做的一项调查似乎也说明了这个问题．他给台湾师范大学数学系400名学生（大一到大四每个年级100人）呈现了包括海伦公式、泰勒公式、点到直线的距离公式、球体积公式、圆面积公式和斐波那契数列通项公式等在内的29个数学公式，让学生评选出其中最美的数学公式．这29个公式中包含了15个从《最美的数学公式》（*The most beautiful mathematical formulas*. L. Salem, F. Testard, C. Salem. New York: John Wiley, 1992）一书中选出来的，世界很多数学家都认为很美的数学公式．结果发现多数学生把票还是投给了他们最为熟悉的泰勒公式（尽管其略显复杂）和勾股定理[2]．

第二，给学生多讲授一些相关知识，拓宽学生的视野，增强学生对数学知识的全面了解；鼓励学生多参加数学实践活动，增强学生的应用意识和能力，使学生理解数学的巨大价值．

由上述美感理论我们知道，情感在美感的产生过程中起着至关重要的作用．审美主体因为对客体有情感才关注它，使之成为审美对象．审美主体因为对审美对象有情感才深入了解它，在此基础上展开丰富的联想和想象．最后，正是审美主体的情感大量喷涌才使得审美主体产生了愉悦感、满足感和陶醉感．而学生对数学知识的情感从哪里来的？由平时的教学实践我们知道，学生对于数学的情感主要来源于其对于数学知识的认识和对数学知识巨大价值（包括实际生产、生活和智力等方面的价值）的了解，特别是后者．学生对数学知识了解全面了，认识深刻了，体会到了数学的巨大价值，其对于数学的态度和兴趣就会转变，变得越来越重视数学，越来越喜欢数学，长期以往就会对数学产生深厚的情感．当前情感心理学中也这么讲：情感是“知之深爱之切”；情感的产生和增强与个体对情感对象的理解和了解是密不可分的[3]．因此，数学教学中，教师应在给学生介绍完课程规定的知识之后再补充一些相关内容，比如相关的历史内容、文化内容、应用知识等，使学生能更加全面地了解和更深刻地理解学习的内容．同时，积极寻找和创造机会鼓励学生参加相关的数学实践活动，在实践中进一步理解刚学习过的知识，了解数学知识的实用性，体会和发现数学的力量与价值，从而促进学生数学情感的产生和加强．

第三，教学中应重视恰当“留白”的作用，引导学生的联想和想象．数学具有严密的逻辑性，数学教学向来重视确切、严密和完整，注重一丝不苟．如此教学无疑对于学生准确地理解数学知识和牢固地掌握数学知识有着重要作用，长期以来我们国家的中小学生数学“双基”牢靠，一直领先世界其它国家的中小学生，就是很好的说明．但是，如此教学对于学生理解数学美，体会数学美感就显得吃力了．由上述美感理论我们知道，审美活动中最后美感的达到始于审美主体对审美客体认知之后的联想和想象，联想和想象起着关键的作用——这就是为什么同一个场景的绘画和彩色照片相比前者往往给人的感觉更美一些的根本原因．那么联想和想象从何而起呢？现代心理学研究表明，联想和想象都是个人的主观行为，它们的产生一方面与个体的思维方式和活跃程度有关系，另一方面也与所接触到的事物的形态有着密切关系[4]．如果一个事物对于个体来说是熟悉的，是个体喜爱的，但同时尚有部分“欠缺”、“不足”或“未知”等，则个体此时就比较容易产生丰富的联想和想象．比如一个熟悉和钟爱大自然的人，看到一幅竹画，这幅画中仅有几棵竹子，也仅画出了竹子中间部分，但这几棵竹子枝叶茂盛、坚硬直立．此时这个人就容易产生联想和想象，比如想到竹子的颜色、所在的园子、竹子高高挺拔的样子和清风吹过竹林，竹林中发出的沙沙声等．格式塔心理学派称这种现象为“完形”，认为人有“完形”的习惯和天性．由此，数学教学中，为了使学生产生美感，教师应在恰当的时机给学生留有“空白”，让学生充分发挥自己的主观能动性去联想和想象，促进学生美感的产生．

教学中我们曾做过如下实验：在给学生介绍指数概念时，先带着学生计算出了2^2、2^3、…2^{30}的值，然后让学生自己计算后面的5个，再然后想象2^{40}、2^{52}、2^{64}的值大约有多大？想象如果一斤大米有25 000粒，那么2^{64}粒大米有多少斤？需要多大的粮仓才可以放得下？够全国13亿人口大约吃多久？等．结果学生对这次指数的学习印象非常深刻，部分学生对指数概念和记法产生了很大的兴趣．在讲授圆台的体积公式时，在介绍完公式之后，让学生根据圆台的形状想象圆台的变化，修改公式．我们发现，学生突然悟到圆台和圆锥、圆柱的关系时几乎都是十分兴奋的，充满了满足感和愉悦感．

第四，重视学生审美方向的引导和情感的带动．数学美不同于艺术美、音乐美和食物美等，数学美在于数学知识的简洁、和谐、统一、奇异、抽象等，而不是其它．如果说艺术美愉悦的是我们的视觉，音乐美愉悦的是我们的听觉，美食愉悦的是我们的味觉，那么数学美愉悦的是我们以抽象逻辑思维为核心的数学思维．数学概念、法则、公式、符号等无不是数学思维的工具，它们的运用帮助的正是我们的数学思维活动．它们的巧妙运用如简洁、和谐、奇异等无不令我们的抽象逻辑思维得到满足和愉悦．因此，为了使学生理解数学美，产生数学美感，教师应在教学中结合一定的知识有意识地引导学生的审美方向，使学生认知到其中的价值所在，增强学生对这部分内容的认知，使学生把握数学美的本质，从而促进数学美感的产生．

教学中教师除了应引导学生的审美方向外，还应在适当的时候恰当地带动学生的情感．数学美感是情感大量涌出喷薄而发之后产生的一种感觉．一个人的情感怎么才能涌出导致喷发呢？现代心理学研究表明有一个或一些情感丰富的人带动是一个好办法，因为情感在一定的情况下可以“传播”和起带动作用．这就是为什么我们在体育场集体看比赛往往比个人在家通过电视看比赛容易激动的原因．由此，为了使学生的情感尽快提升起来达到高峰，教师应在恰当的时机，

注重带动学生的情感，促进学生情感的喷发.

第五，重视对数学美感的回顾、总结和评价. 由上述美感理论我们知道，美感是个体认知后情感的升华和喷发，因此，一次成功的审美活动，一次强烈的美感体验，不仅能给人以深刻的印象，使其长久不被遗忘，而且还能影响个体以后的审美活动. 特别是强烈的美感体验，常常能改变一个人的审美态度，丰富个体的审美知识，增强个体的审美能力，使得审美主体的情感变化得到一次很好的锻炼，从而使得今后类似的审美活动更加容易，美感体验来得更加迅捷. 所以，当学生体会到数学美感之后，教师应当及时引导学生回顾、总结和评价，使学生牢固掌握这次审美过程中得到的经验和教训，加深印象，端正学生的审美态度，增强学生的审美能力，为下一次数学美感的体验奠定基础.

5 数学美教学中应注意的问题

数学美的教学是一个复杂过程，为了使这项工作落到实处，除了上述一些教学要求之外，我们认为，无论是教师还是学生还应当注意以下几个问题：

（1）教师应多方面了解数学美，掌握比较丰富的美学理论知识. 教师是教学的主导，在数学美的教学过程中，只有教师了解了什么是数学美，有了丰富的美学知识，才可能正确选择典型的数学美的材料呈现给学生，调动学生的积极性，正确指导学生的审美方向，增强学生对数学美的认知能力，在适当的时机采取恰当的策略调动学生的情绪，激发学生的情感，帮助学生总结和评价，使学生获得数学美感体验.

（2）教师应该有较丰富的数学美感体验. 美感体验过程是一个多种成分有机结合，共同作用的过程. 这个过程中什么环节要理性认知，什么环节要情感喷发等，这些实际知识只有美感经验非常丰富的人才能清楚地了解和把握，更只有美感经验非常丰富的人才能借助这些知识恰当地引导和带动别人的情感. 所以，为了使学生更快、更好地体会到数学美感，教师拥有丰富的数学美感体验至关重要. 我们很难想象一个没有数学美感体验的教师能把学生带到情感的高峰.

（3）师生应注意协商选择一个宽松的环境和恰当的时机. 数学审美过程中，由于数学美的特殊性，师生对数学美的感知和认知需要运用抽象思维. 同时，师生还需要在认知的基础上展开丰富的联想和想象，需要调动情感，使其升华，达到高峰. 这样，师生不仅需要知识、态度方面的准备，而且还需要心理、情感、环境和生理状态等方面的准备. 只有师生双方都在心理和情感方面做好充分准备，处在一个宽松的环境中，精神饱满而不疲惫，此时才可能比较容易体会到数学美感.

6 结 束 语

数学教学中重视学生数学美感的教学具有重要作用. 如何进行数学美感的教学？从美感的本质和产生过程理论出发，数学教学中除了应挖掘数学知识中的数学美特征展示给学生进行教学之外，还应当选择学生熟悉的数学内容；多方面联合增强学生对数学知识的情感；重视知识的“留白”作用，引导学生联想和想象；重视情感的引导和带动；重视成功数学美感经验的回顾和总结等. 另外，教师和学生还应当注意多了解数学美知识和美学知识，注意积累数学美感的体验，选择恰当的时机和环境开展教学. 只有这样才可能将数学美的教学顺利展开.

［参 考 文 献］

[1] 李戎. 美学概论[M]. 济南：齐鲁书社，1992.
[2] 谢佳叡. 最美的数学式[J]. HPM通讯，2000，Ⅲ（4）：6–14.
[3] M・雅科布松. 情感心理学[M]. 哈尔滨：黑龙江人民出版社，1997.
[4] 张积家. 普通心理学[M]. 广州：广东高等教育出版社，2003.

Instructing of Mathematical Beauty Based on Bringing of Aesthetic Feeling

YANG Ze-zhong
(School of Mathematics, Shandong Normal University, Shandong Jinan 250014, China)

Abstract: To study instruction of mathematical beauty was important. Based on the theory of aesthetic feeling, in order to make students feel mathematical beauty, the teacher should chose the mathematics content that student knew very well, and attach importance to enhancing emotion of students to mathematics, and leading image and emotion, and generalizing the experience of mathematics aesthetic feeling. In addition, the teacher and students should know more knowledge about mathematical beauty and aesthetic feeling, and accumulate experience of mathematics aesthetic feeling, and find right time and place for instruction.

Key words: mathematical beauty; aesthetic feeling; mathematical instruction; emotion

[责任编校：周学智]

第17卷第2期　　数学教育学报　　Vol.17, No.2
2008年4月　　JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION　　Apr., 2008

中小学生提出数学问题能力的评价再探

夏小刚，汪秉彝，吕传汉

（贵州师范大学 数学与计算机科学学院，贵州 贵阳 550001）

摘要：对学生提出数学问题的能力进行评价，其目的在于更好地根据学生提出问题能力的状况来改进教学，使他们的数学创新意识和能力得到进一步发展．立足于对学生提出问题中的数学思维的揭示和分析，建立以问题的数量、问题的种类和问题的独创性为指标的关于学生提出问题能力的评价标准．

关键词：提出问题能力；数学思维；评价指标；评价标准

中图分类号：G423.04　**文献标识码**：A　**文章编号**：1004-9894（2008）02-0008-04

在新课程下，《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》（2001）和《普通高中数学课程标准（实验）》（2003）相继提出培养学生问题意识和提出问题能力的课程目标[1, 2]．由此，提出问题成为我国数学课程改革的一个重要话题．几年来，提出问题的教学研究取得了不少成绩，各种各样有关提出问题的教学方法和方案与日俱增．然而，在教学实践中，尚存在不少有待解决的问题，譬如关于学生提出问题能力的评价问题，便是困扰教师有效实施提出问题教学的一个重要问题．《数学教育学报》2007年第3期发表了“中小学生提出数学问题能力的评价探究”一文[3]，该文立足于中小学数学“情境—问题”教学的实验研究，从问题的数量和质量两个方面，对学生提出问题能力的评价标准进行了探究．本文拟在此基础上，就提出问题能力评价的目的与作用，评价标准的建立等问题作进一步的探讨和分析，以期有一些理性的提升和拓展．

1 评价的目的与作用

在数学活动中，提出问题指：“通过对情境的探索产生新问题，或在解决问题过程中对问题的再阐述．”[4]其实质就是一种以问题生成为基本形式的数学探究活动．因此，对学生提出问题能力的评价应基于动态的、不断呈现学生思维发展的提出问题过程．评价的目的在于更好地根据学生提出问题能力的状况来设计教学，改进和精炼教学策略和方法，使学生的数学创新意识和能力得到进一步发展．

评价可以对教师的教学决策提供有用的信息．具体地说，由于提出问题成为数学教学的基本构成——既作为教学的一种手段，也作为教学的一种目标，因此以适当的方式评价学生提出问题的能力，这有助于考察学生对基础知识的理解和基本技能的掌握，也有利于揭示和分析学生的数学思维．

作为一种教学手段，提出问题是学生理解基础知识、掌握基本技能的一种学习方法．因此，为了有效达成教学的基本目标，教师需要以有效的活动方式来评价学生提出问题的能力，并以此考察这种教学方式对学生知识技能的影响．譬如在高中“函数”概念的教学中，教师给学生提供了一个关于“函数”概念的数学任务：

考虑问题：$f(x)=x$ 与 $f(x)=\frac{x^2}{x}$ 是不是同一个函数？提出你能解决的问题．你能够提出和解决多少个不同的问题？

对上述两个函数的判断，学生可能会提出“是同一个函数”和“不是同一个函数”的问题．比如，如果这两个函数是同一个函数，那么它们的定义域是什么？其对应关系相同吗？等等．通过对这些问题的考察，教师可以诊断学生在“函数”概念学习中存在的问题，帮助他们进一步弄清“函数”概念所包含的意义，促进其对“函数”概念的认识．

作为一种教学目标，提出问题教学的核心在于激发学生的问题意识，提高他们提出问题的能力．这就要求学生积极提出问题，并以探索的方式进行学习．譬如在数学问题的解决活动中，一个常规问题可以用一个标准的算法解决，但是一个非常规问题则要求学生对问题情境及问题解答进行探索．为此，学生需要将问题解决调整为在原有问题中寻求新的问题，即提出一些连续的更能体现已知信息与目标之间的关系的问题．这样，通过对原有问题目标的层层分解以及次目标的逐次实现，不断接近或达到对原有问题的解决[5]．在此过程中，由于学生的思维方式不只是抽象和逻辑的，还有直觉的、归纳的和类比的，因此，对学生问题探究中的提出问题能力进行科学评价，有利于揭示和分析学生的数学思维．

2 评价标准的建立

提出问题能力的评价目的在于改进教学，提高学生的创新意识和能力．自然地，评价的核心就在于对学生提出问题中的数学思维，特别是创新性思维的揭示和分析．

提出问题是创造性活动的一个基本特征．目前，尽管人们对于数学活动中的提出问题与创造力之间的一般关系还不十分清楚，但是对“问题”的创造性的关注却一直是有关提出问题评价的基本着力点[6]．事实上，在早期有关提出问题的教学研究中，研究者就已从托伦斯创造性思维测验（Torrance test of creative thinking）中得到启发，提出了关于提出问题能力的新认识，即现今被人们普遍接受的、用以表

收稿日期：2008-01-09

基金项目：贵州省优秀科技教育人才省长专项基金项目——贵州农村地区数学“情境—问题”教学实验基地建设研究（黔科教办[2007]03号）；中国教育学会“十一五”重点科研课题——西南地区数学“情境—问题”教学实验的推广研究（学会：0629070）

作者简介：夏小刚（1966—），男，贵州务川人，教育学博士，主要从事数学学科教学论研究．

征提出问题能力的三要素[7]：

（1）问题的数量——思维的流畅性；

（2）问题的种类——思维的灵活性；

（3）问题的新颖性——思维的独创性．

无疑，这为人们进一步认识学生提出问题中的数学思维提供了条件．由此，我们可以以问题的数量、问题的种类和问题的新颖性为指标，建立一个关于学生提出问题能力的评价标准．

2.1 问题的数量

问题的数量是评价学生提出问题能力的基本指标之一．主要关注的是学生能否提出大量有价值、有意义的、表达清楚的问题．事实上，提出问题无论是作为教学手段，还是作为教学目标，其基本任务就是允许学生提出大量的数学问题．至少，一个学生所提出的问题数量较多，表明他在收集和处理问题信息时能产生大量有价值和意义的联想，对其中的数学关系能根据问题的结构要求进行不同的排列，并给予清楚的表达．以下面有关“圆点图形”的数学任务[8]为例：

黄老师按某一规则画了下面一组图形（如图1所示）：

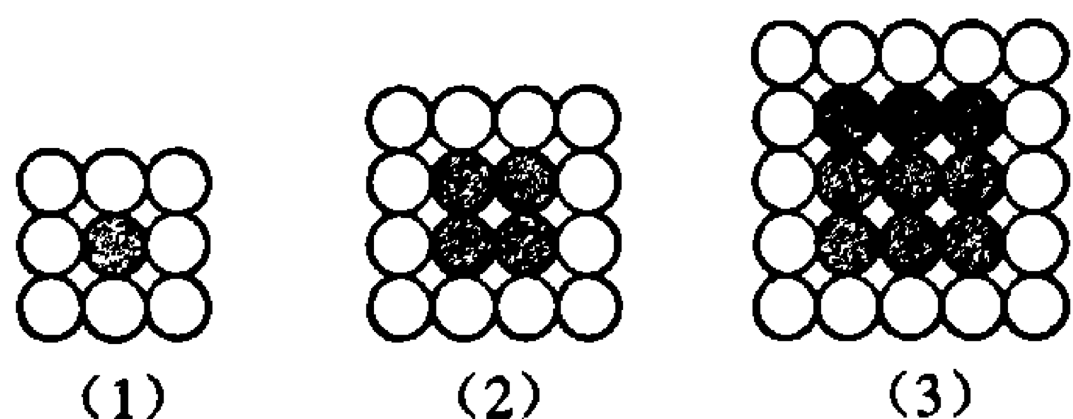


图1　圆点图形

他要在这组图形的基础上提出3个问题作为学生的家庭作业：一个是比较容易的，一个是中等难度的，另一个是比较难的问题．这3个问题可以用上面这组图形提供的信息解决．

请你帮助黄老师想出3个问题，并把它们写下来．

在这个“圆点图形”任务中，虽然给学生提供的情境——“圆点图形”和教师要求“提出问题”的背景信息——没有明确的、需要解决的数学问题，但包含了一些可以帮助学生发现和提出数学问题的探究点：某个或多个图形的点数，不同图形点数的比较，以及图形点数的变化规律等．比如，围绕图形的点数，学生可能提出诸如“第3个图形的点数是多少？”“第5个图形的黑点数是多少？”“第10个图形中的白点数是多少？”等问题．围绕图形点数的比较，可能提出“第3个图形的点数比第2个图形的多多少？”“第11个图形的点数比第10个图形的多多少？”等问题．

把问题的数量作为评价学生提出问题能力的一个基本指标，其目的是为了引导学生在问题意识的驱动下去发现问题和提出问题．基于这种需要，人们常常要以问题的数量去考察学生问题意识与提出问题能力的发展．为此可采取以下方法：就学生个体而言，一种可行的方法就是教师对学生当前和以往提出的问题数量进行统计和分析；对不同学生或不同班级的学生来说，可以对他们提出的问题数量进行比较．

2.2 问题的种类

在提出问题能力的评价中，如果说对问题数量的关注在于考察学生能否在较短的时间提出大量有价值和意义的问题，那么对问题种类的判别，则主要关注的是学生能否从不同的角度提出不同的数学问题．事实上，在一项关于提出问题的具体任务中评价学生不同的数学反应，这对于学生弄清如何决定两种反应相同或不同，进而提高其思维的灵活性是十分必要的．因此，当学生提出大量的问题之后，教师需要关注的就是从这些问题中鉴别哪些是同一种类的数学问题，哪些属于不同种类的数学问题．

通常，对于学生提出的问题种类的判断，可采取多种不同的判断纬度，如问题信息的拓展与否、问题的可解性、问题的难易程度等．以“圆点图形”的数学任务为例，假定学生A提出了这样3个问题：

（1）第3个图形的白点数是多少？

（2）第10个图形的白点数呢？

（3）第n个图形的白点数呢？

从问题信息的拓展程度来看，可以判断它们分别属于两种不同种类的问题，其中，问题（1）属于非拓展性问题，其信息来自“圆点问题”情境给定的初始条件，问题（2）和问题（3）属于拓展性问题，其信息已超越“圆点问题”情境给定的初始条件．

为了进一步分析有关问题的种类，我们提供了一个相关的判断问题种类的结构示意图（见图2）．图中显示了不同判断纬度按一定序列所形成的结构关系：“问题信息的拓展”纬度——“问题的可解性”纬度——“问题的难易程度”纬度．从中我们可以对问题的种类做出相应的判断：以问题信息的拓展纬度来判断，数学问题被分为“非拓展性问题”和“拓展性问题”；以问题的可解性为判断依据，“非拓展性问题”被分为“可解决的非拓展性问题”和“不可解决的非拓展性问题”，“拓展性问题”被分为“可解决的拓展性问题”和“不可解决的拓展性问题”．以问题的难易程度为纬度，还可以对问题的种类作进一步划分．由此形成两个方面的数学问题：

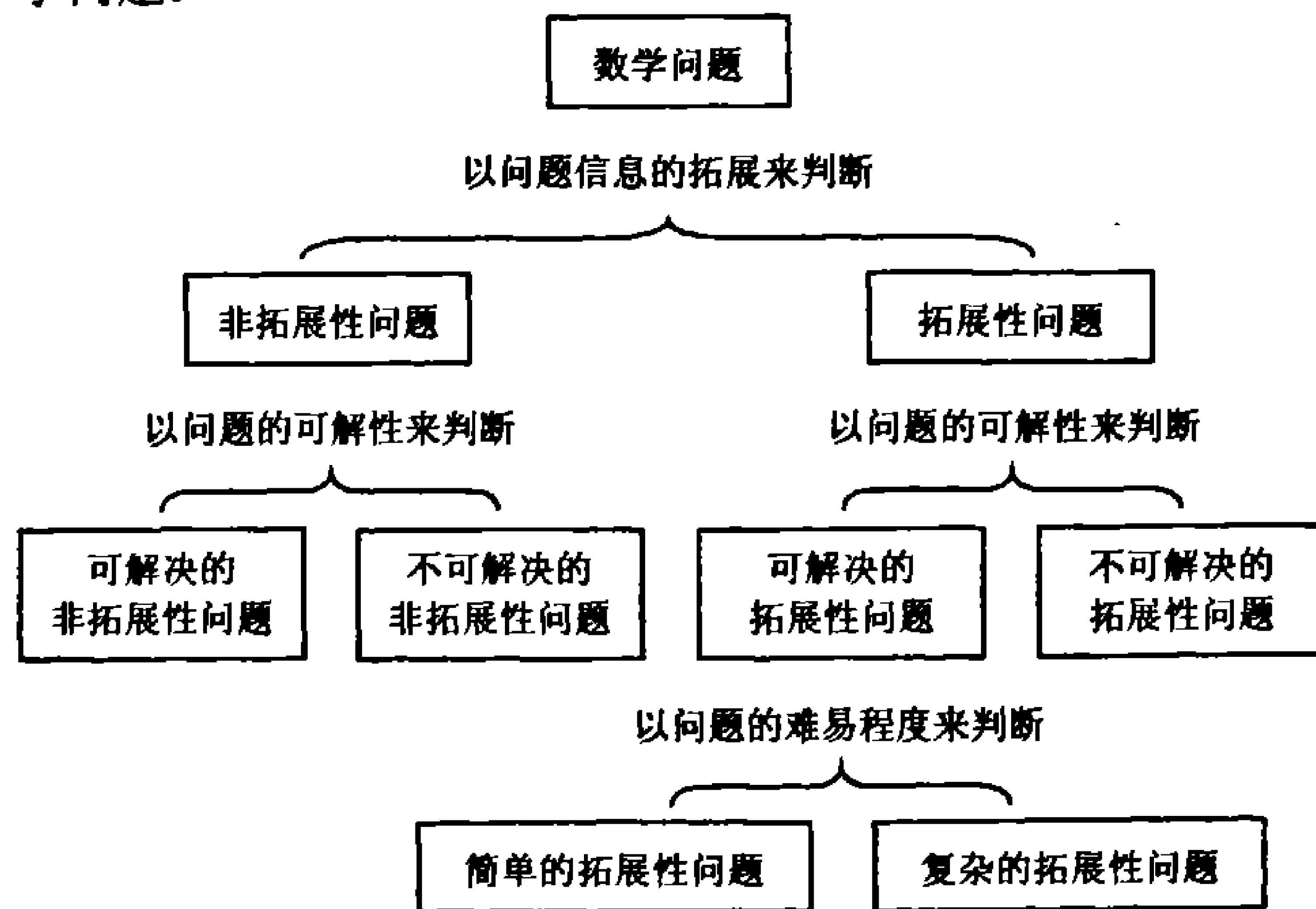


图2　问题的种类判断

一是有价值和意义的数学问题——可解决的非拓展性、简单的拓展性问题以及复杂的拓展性问题．

二是没有价值和意义的问题——不可解决的非拓展性问题和拓展性问题．

在我们看来，把问题的种类作为一个重要的评价指标，并把与此相关的信息传递给学生，这有助于转化学生的思维

模式，增强其思维的灵活性.

2.3 问题的新颖性

问题的新颖性是反映学生创造性思维的核心要素.对问题新颖性的判断，其视角可以是数学的，也可以是教育的.从数学的角度看，一个问题具有新颖性，主要指它在某个特定数学学科领域上的独创性．然而，在数学教育中，“问题”被看作是人的一种心理困惑，问题的存在与否，取决于人的主观认知和感受，因此，问题是否“新颖”，往往具有相对性．换言之，新颖的问题大多包含了两个基本特征：

（1）原创性——问题必须对其他学生的问题而言是“新”的．通常，新颖的问题往往具有不落俗套的、出人意料甚至有趣的特点．

（2）合理性——问题必须合乎数学的简洁性、逻辑性特点且为师生普遍接受．否则即使问题是“新”的，可能也难以被人赏识．

关于问题是否新颖的判别方法，我们可以从托伦斯的创造性思维测验中得到有益的启示．按照托伦斯创造性思维测验的基本思想：“独创性的分数是由统计频数所决定的．如果被试的想法或观点罕见于常模所记录的学生的想法，就可以认为这种想法具有独创性．”[9]因此，当提出问题的任务作为检测学生思维独创性的一部分而被实施时，一种可行有关问题新颖性的判断方法就是把提出问题的测试应用于许多学生，从学生的反应中积累一些典型的数学问题，并对不同的问题分别赋以不同的分值．然后，在学生的问题中找出与这些典型问题最接近的问题，据此就可以对问题的新颖性加以判断．或者，从所有学生提出的问题中积累一套典型问题，然后把学生提出的问题与那些典型问题作比较，看这个给定问题是否具有典型性，这样，通过对新颖问题的数量进行统计，就可以检测学生思维的独创性．当然这是一项十分艰巨复杂的工作．

以上 3 个方面评价内容及其权重比例分配如表 1 所示．考虑到问题的数量和问题的种类在学生提出问题能力发展中具有比问题的新颖性更为基本的意义，因此，这两个评价指标的权重比例相对较高．

表 1 学生提出问题能力的评价量表

评价因素				得分	
母项	母项权数	子项	子项权数	子项得分	母项得分
A 问题的数量	K_A=0.40	A_1：有价值和意义的问题数量	K_1 = 0.60		
		A_2：表达清楚的问题数量	K_2 = 0.40		
B 问题的种类	K_B=0.40	B_1：问题的可解性	K_3 = 0.30		
		B_2：问题信息的拓展程度	K_4 = 0.40		
		B_3：问题的难易程度	K_5 = 0.30		
C 问题的新颖性	K_C=0.20	C_1：原创性	K_6 = 0.40		
		C_2：合理性	K_7 = 0.60		

3 结束语

前面，我们建立了一个以问题的数量、问题的种类和问题的新颖性为指标体系的关于学生提出问题能力的评价标准．然而，评价标准的建立只是为考察学生提出问题的能力提供了条件．事实上，为了增强评价的针对性和有效性，教师在评价时还应关注以下两个方面的问题：

其一，对学生提出的问题进行判断.在提出问题活动中，由于学生提出的问题并非都是教师期望的问题，因此评价时应关注那些与数学有关的、有价值和意义的问题．为此，需要判断学生提出的问题中哪些是数学问题？哪些不是？如果是数学问题，它们是否有价值和意义？

其二，评价主体的多样化．教师应鼓励学生积极参与，把学生自评和互评结合起来．这样，既可以帮助教师找出学生存在的问题，以改进教学策略和方法，同时也有利于促进学生创新意识和能力的发展．

作为对提出问题能力评价的进一步反思，我们也应看到，上述评价标准的设计只是诸多设计策略中的一种．事实上，提出问题能力的评价不仅关注学生提出问题的结果，也关注学生提出问题的过程；不仅关注学生提出问题的水平，也关注他们在提出问题活动中情感态度的变化．因此，如何从多角度和多层面来设计评价标准，以使提出问题能力的评价能基于动态的、不断呈现学生思维发展的提出问题过程，这仍然是值得我们进一步研究的重要话题．

[参考文献]

[1] 中华人民共和国教育部．全日制义务教育数学课程标准（实验稿）[M]．北京：北京师范大学出版社，2001.
[2] 中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准（实验）[M]．北京：人民教育出版社，2003.
[3] 郑雪静，汪秉彝，吕传汉．中小学生提出数学问题能力的评价探究[J]．数学教育学报，2006，15（3）：47–52.
[4] Edward A Silver. On Mathematical Problem Posing [J]. For the LEarning of Mathematics, 1994, 14 (1): 19–28.
[5] Duncker K. On Problem Solving [J]. Psychological Monographs, 1945, (5): 58–62.
[6] 夏小刚，吕传汉．美国数学教育中的提出问题研究综述[J]．比较教育研究，2006，27（2）：18–22.
[7] Lyn D English. Children's Problem Posing within Formal and Informal Contexts [J]. Journal for Research in

Mathematics Education, 1998, 29 (1): 83–106.
[8] 蔡金法．中美学生数学学习的系列实证研究[M]．北京：教育科学出版社，2007.
[9] A・J・斯塔科．创造能力教与学[M]．刘晓陵，曾守锤译．上海：华东师范大学出版社，2003.

Exploration on the Evaluation of Students' Ability of Posing Mathematical Problems

XIA Xiao-gang, WANG Bing-yi, LV Chuan-han
(Mathematics and Computer Science College, Guizhou Normal University, Guizhou Guiyang 550001, China)

Abstract: The aim of evaluating the students' ability to pose mathematical problems was to improve teaching according to the change of students' the ability to pose problems, which could make students' mathematical creative thinking and ability further improved. Establish evaluation criterion of students' posing problems, which was based on exploration and analysis of students' creative mathematics thinking of posing problems, by making the number, kinds and novelty of problems the evaluation index.
Key words: ability to pose problem; mathematical thinking; evaluation index; evaluation criterion

[责任编校：周学智]



书　讯

为积极参与初、高中数学课程改革，沈文选先生撰写了一套以献给中学师生、高师院校数学专业学生、广大数学爱好者，企图拓展其数学视野、提高数学素养、融进新课改理念、丰富数学文化的丛书．这套丛书是作者学习张景中院士的教育数学思想，响应张奠宙教授的倡议：建构符合时代需要的数学常识，享受充满数学智慧的精彩人生的书籍．该丛书由张奠宙教授作序，于 2008 年 1 月由哈尔滨工业大学出版社出版，共计 300 余万字，分为 6 册：

《数学透视眼光》该书 10 章，内容丰富，令人兴奋，其中包括了勾股定理的近 200 种证法．定价：每册 38.00 元．

《数学思想领悟》该书 7 章，其中介绍了中学数学的尽可能多的思想，并系统分类举例谈领悟．定价：每册 38.00 元．

《数学应用展观》该书 13 章，介绍了中学数学知识在生产、生活、学习中的广泛应用．定价：每册 38.00 元．

《数学建模导引》该书 7 章，其中介绍了利用中学数学知识进行建模的大量案例．定价：每册 28.00 元．

《数学方法溯源》该书 22 章，其中介绍了从生活实践中归纳出 22 个数学方法原理及应用．定价：每册 38.00 元．

《数学史话揽胜》该书 11 章，其中介绍了中学数学各类知识产生的历史故事及数学发展年鉴．定价：每册 28.00 元．

上述书籍均可直接到各地新华书店购买或订购，也可以与哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室（150006，哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号，0451-86281378）联系邮购．若想从作者沈文选（410081，长沙市湖南师范大学数学系，0731-6655633）处邮购，则需另加 15%的邮资费．

第 17 卷第 2 期　　数 学 教 育 学 报　　Vol.17, No.2
2008 年 4 月　　JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION　　Apr., 2008

从函数单调性的实无限谈起
——学生对数学概念中隐含的无限的认识研究

张伟平

（上海师范大学 数理信息学院 数学系，上海　200234）

摘要：总体来说，中学生对数学概念中隐含的实无限认识不足，影响学生实无限认识的主要因素是整体认知. 极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义是学生普遍感到困难的知识点，只有理解了 $\varepsilon-\delta$ 定义中的实无限涵义才能真正理解极限的定义. 学生能否抓住 $\varepsilon-\delta$ 定义中的“有分界”的无限，是理解 $\varepsilon-\delta$ 定义的关键. 教学中应帮助学生挖掘概念背后的实无限思想，培养学生的无限观. 帮助学生分析概念中隐藏的无限. 在 $\varepsilon-\delta$ 定义的教学中，教师应从无限操作过程、无限思辨方式、ε、δ 本身具有的任意性和存在性的双重内涵、集合论知识角度详细诠释“有分界”的无限涵义，使学生更容易理解证明中的“适当放大”，从而深刻理解 $\varepsilon-\delta$ 定义的操作性内涵.

关键词：隐含无限；整体认知；“有分界”的无限

中图分类号：G421　**文献标识码**：A　**文章编号**：1004-9894（2008）02-0012-05

1　函数单调性的实无限内涵

函数的单调性是教学的一个难点，而理解上的困难在于它的无限背景.

从小学学习自然数开始，学生就有了潜无限意识. 后来接触的直线、平行、循环小数等，继续增强潜无限的意识. 然而，进入高中阶段，学生立即面临“实无限”. 特别是定义域为无限集的函数概念，以及相关的函数单调性，周期性等特征，都涉及“实无限”数学对象的处理. 迄今为止，教材和教学中，大多没有明确指明函数单调性中的无限特征，学生只能自发感悟其中隐藏的“无限”背景.

函数的单调性在初中阶段就有所涉猎. 那时学生观察直线 $y=2x$ 的图像是逐点上升的，一目了然.

但到了高中阶段该如何精确定义呢？函数的单调增加特征，要描述的不是基本向上，或总体向上，而是每两个点的比较都向上（一个也不能少）的函数性态.

如果函数的定义域是有限的(只不过相当于一张表格)，那么只要把所有的点，按自变量增大方向把函数值依次排起来观察就行了. 无论点有多少，只要是有限的，计算机使用排序程序立刻就能办到. 然而，如果定义域是无限集合，我们必须面对无限多的 $(x, f(x))$，要将无限多对点按 x 增大方向都排序，那是无法作到的事情.

正因为有这样的无限背景，数学上不得不采用逻辑量词“任意”来对付，借“任意 x_1，x_2”来表示考虑所有的点，一个也不能少的特征. “任意的”量词实际从“整体认知”角度囊括了一切 x 点的特性. 这种表面上看起来是有限的语言，却解决了描述单调性时涉及的“无限”困难.

学生对单调性无限的认识与“潜无限”和“实无限”的分辨有关. 单调性中的“实无限”和“一尺之棰……”中的“潜无限”不一样. 3 个学生中只有两个学生认识到二者的区别.

尽管函数单调性中的实无限内涵丰富，但对 195 名高三学生作问卷调查，结果只有 28.2%学生认为单调性中蕴涵无限. 就中学数学而言，无限包含于具体的数学概念中. 有的以显性方式呈现，如自然数、平行线；有的隐含于数学概念中，如函数单调性、交换律；有的存在于某一特定对象的无限过程中，比如函数极限；有的就是函数概念的属性，Cantor 超限数理论将无限作为集合的属性. 学生对数学概念中明显表现出的无限能够正确认识，但对数学概念中隐含的实无限认识不足. 重要的数学常被认为是当它的讲述范围大到包括无限的时候. 现代数学对象的库存中是充满无限的，无限是难以回避的[1].

2　自然数的无限性——两种对立的无限观

尽管 Aristotle 承认每一个自然数的存在，但全体自然数不可得，不能被人类所认识. 他没有将自然数看作实无限，相反，他们可以表征为潜无限. 自然数作为一个确定的数学模式，已由 Peano 公理作出了完整表述：它是从一个有限数 1（也可以从 0）开始，后继数都由加 1 的手续产生. 其中第 5 条公理称之为“归纳公理”，即肯定了自然数的无限性.

直觉主义者坚信自然数列的延伸是没完没了的、永远不可能完成的，自然数存在于不断创造之中，是创造不完的，因而它们不可能形成一个整体的无限集合. 自然数列只是一种具有潜在无限性的事物，自然数的无限是“潜无限”.

收稿日期：2007-11-28
作者简介：张伟平（1972—），女，湖北黄冈人，讲师，博士，主要从事数学学习和数学教学研究.

另外，经典数学家（非直觉主义者）认为自然数可以考虑成为一个“完成了的整体”，它形成一个含有无限多元素（自然数）的有序集合，而一切自然数都在其中．这是关于自然数列的“实无限”[2]．

一般而言，潜无限是学生的自发思辨方式，实无限思辨是在潜无限的基础上经过飞跃而形成的．潜无限和实无限的矛盾贯穿无限认识的过程中．

3　中学生对数学概念中隐含的无限的认识

3.1　问卷调查

调查对象：高三学生195名．

调查内容：

下面数学语言中，若是你认为和“无限”有关，请在括号中打“√”．

1．函数（　）；2．单调性（　）；3．$n!$（　）；4．奇偶性（　）；5．交换律（　）；6．数列的前n项和（　）

中学生对数学概念中隐含无限的认识如图1所示．

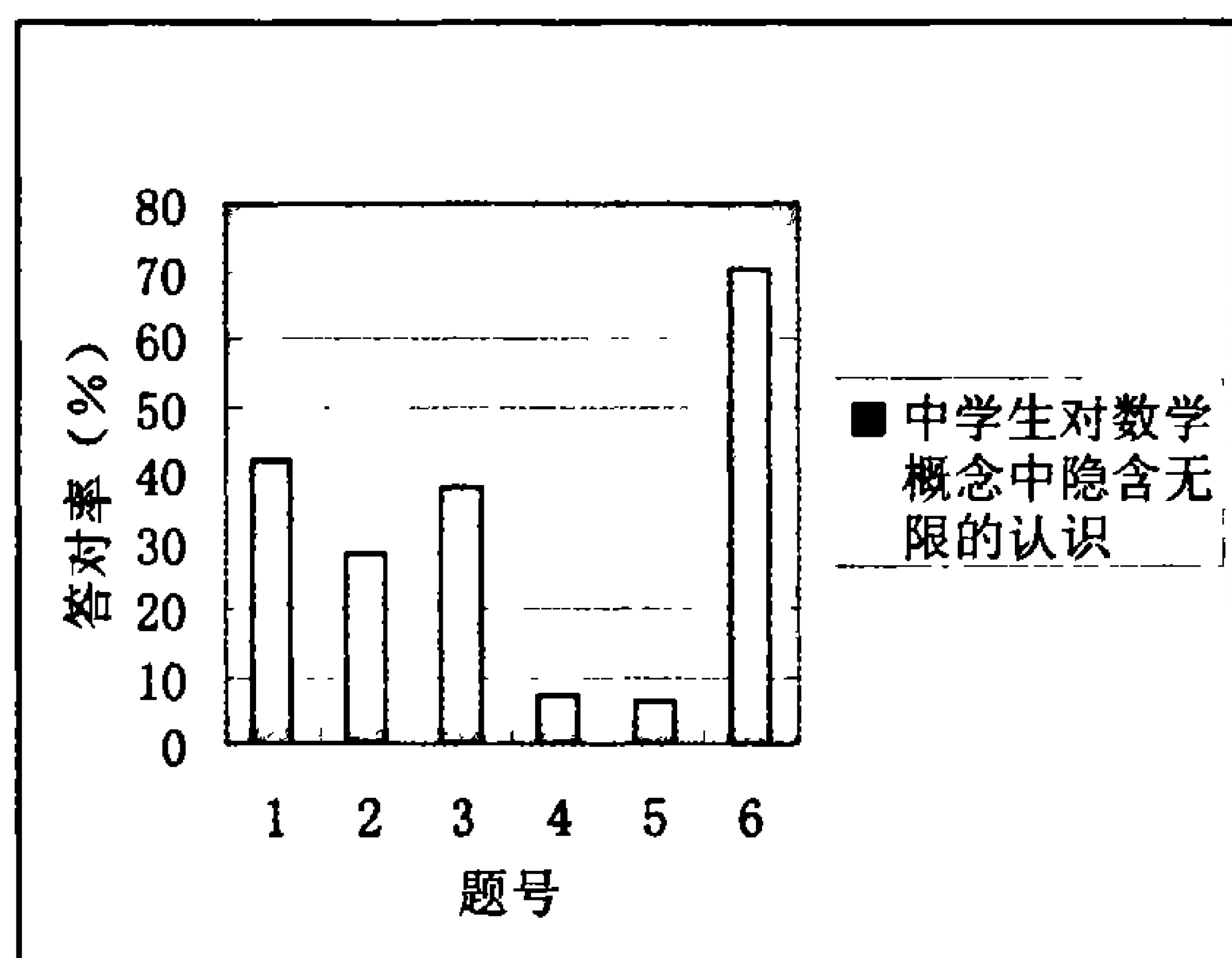


图1　中学生对数学概念中隐含无限的认识

从图1可以看出，总体来说，学生对数学概念中隐含的实无限认识不足，除了第6题（数列的前n项和）之外，其余题目答对率都不高．答对率最低的是第4题（奇偶性）、第5题（交换律）．奇偶性、交换律中的实无限隐藏很深，学生不易察觉，说明学生对数学概念中隐含的实无限难以认知．“$n!$”、“数列的前n项和”中的n虽然可以取任意大的数，但仍然是有限的．高三学生对“数列的前n项和”答对率较高，但对“$n!$”答对率较低．说明学生对数学概念中的无限的辨认有待提高．

3.2　个案访谈1——高三学生对函数单调性的实无限直觉认知

研究对象：杰、栋、宇、豪、芹、悦、硕、枫8名同学．

研究内容：单调性中是否蕴涵无限？

研究形式：逐一访谈，全程录音．

研究结果如下（其中“一尺之棰……”指“一尺之棰，日取其半，万世不竭”）．

杰：是，“任意x_1，x_2”代表每一对取值．与“一尺之棰……”所说的无限不一样，“一尺之棰……”是指无穷无尽，单调性的无限是表示所有的．

栋：否，因为“任意x_1，x_2”和“无穷”不一样．

宇：否，单调性是比较$f(x_1)$，$f(x_2)$的大小．

豪：是，“任意x_1，x_2”要考察无限个点．与“一尺之棰……”所说的无限差不多，都表示一直取下去．

芹：否，单调性是函数图像的走向．

悦：否，单调性是考察$f(x_1)$，$f(x_2)$的大小．

硕：否，“任意x_1，x_2”不等于“无穷”．

枫：是，“任意x_1，x_2”是对无穷个x_1，x_2逐一比较．与“一尺之棰……”所说的无限不一样，单调性的无限表示每一对x_1，x_2都具备的性质，“一尺之棰……”表示永远没有完竭．

分析：回答“是”的3个学生的共同点是都抓住“任意性”的涵义来思考．回答“否”的5名学生中两名谈“比较大小”，一名考虑“图像”，两名认为“任意”不等于“无穷”．其中杰的回答表明能够区分潜无限、实无限．可见，学生对单调性的认识分歧主要在于对“任意”的理解上．这里的“任意x_1，x_2”到底有没有暗指无穷？答案是肯定的．

由于函数单调性中无穷的隐蔽性，学生受潜无限和实无限的分辨能力的影响，高三学生直觉感知函数单调性中的无限性存在一定困难．对函数单调性的无限直觉认知属于学生的理解层面，不容易外显化，很难作有效评价．总体来说，学生对单调性的无限直觉存在个体差异性，学生不容易直觉单调性中的实无限．有利于实无限的“整体认知”对于学生认识单调性背后的无限有重要作用．

3.3　个案访谈2——高三学生对概念中隐含的无限的辨认

研究对象：高三学生杰、栋、宇、豪、芹、悦、硕、枫等8位学生．

研究内容：奇偶性、交换律、$n!$、数列的前n项和．

研究形式：依次回答问题：你认为“奇偶性、交换律、$n!$、数列的前n项和”和无限有关吗？请说明理由．结果统计如下：

杰：（奇偶性）是，必须对任意x，满足$f(-x)=f(x)$，或$f(-x)=-f(x)$．（交换律）是，比如实数内必须任意m，n满足$m+n=n+m$．（$n!$）不是，n是有限的涵义．（数列前n项和）不是，表示有限项的和．

栋：（奇偶性）不是，没有提到无限．（交换律）不是，没有联想到无限．（$n!$）是，n可以无穷大．（数列前n项和）是，n可以无穷大．

宇：（奇偶性）不是，是函数的性质．（交换律）不是，从来没有提无限．（$n!$）不是，n无论多大都是有限的．（数列前n项和）是，n可以取无穷．

豪：（奇偶性）不是，与无限无关．（交换律）不是，与无限无关．（$n!$）是，n可以取无穷．（数列前n项和）是，n是无限的．

芹：（奇偶性）不是，不是关于无限的性质.（交换律）不是，交换律是法则，与无限无关.（$n!$）是，n 可以取无穷.（数列前 n 项和）是，n 可以任意取，是无限.

悦：（奇偶性）不是，是研究函数图像的性质，没有无限.（交换律）不是，交换律没有提到无限.（$n!$）是，n 是无限的.（数列前 n 项和）是，n 可以无穷大.

硕：（奇偶性）不是，函数图像的对称性.（交换律）不是，感觉与无限无关.（$n!$）是，n 可以任意取，是无限.（数列前 n 项和）是，n 可以取无穷.

枫：（奇偶性）不是，与无限无关.（交换律）不是，感觉与无限无关.（$n!$）不是，这里涵义是有限的.（数列前 n 项和）不是，表示有限和，不是无限和.

分析：对于"奇偶性"、"交换律"出现最多的理由是他们分别是函数的性质、法则，似乎与无限不沾边；对于"$n!$、数列的前 n 项和"的理由聚焦于 n 的分歧. 总体讲，高三学生不容易直觉数学概念中隐含的无限，学生更多关注的是概念的其它涵义，忽视了概念中的无限. 另一方面，由于"奇偶性"、"交换律"中的无限不同于"一尺之棰，日取其半，万世不竭"中的潜无限，代表已经构造完成的实无限，具有隐蔽性，学生更容易忽视. 只有采用整体认知的"实无限"方式才有利于学生识别数学概念背后隐藏的实无限.

初一学习的数轴也蕴涵无限. 数轴以原点为中心向两边无限延伸，无穷远处分别代表 $-\infty$ 和 $+\infty$. 仅仅指出数轴的三要素：原点、正方向、单位长度远远不够，还必须指出数轴的无限性. 具备了无限的数轴才是一个数学抽象化的概念，它不等同于现实生活中的"温度计"，而是"温度计"的抽象提升. 不强调数轴的无限就无法深刻理解"有理数在数轴上的表示"，"实数与数轴的一一对应".

深刻理解函数概念对于学好中学数学意义重大. 函数的定义，对于定义域中的任意一个 x，在对应法则 f 下，都有唯一确定的 y 值和它对应，蕴涵着实无限，"任意一个 x"暗含着无限个 x，一个也不能少，暗含无限个数量关系 $y=f(x)$. 表面上看起来是处理有限点，实质包含了无限思想，实现了个体可操作化. 从图1看出，只有42.1%的高三学生认为函数中包含"无限"，说明学生对函数中实无限的认知不足. 仅仅掌握了函数的三要素：定义域、值域、对应法则是不够的，不认识到函数中的无限不能算是深刻理解了函数概念，不能算是把握了函数的精髓. 对函数的无限的认知属于理解层面，无法做到函数关系式 $y=f(x)$ 那样外显化，学生是否认知函数的无限，教学上无法有效评价. 教师应将函数隐含的无限昭然若揭，诠释"任意一个 x"的内涵，让学生站在实无限的整体层面理解函数的各要素的关系.

4 高三学生对极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义中包含的有"分界"的无限的理解

极限概念是学生普遍感觉难以理解的概念，极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义成为学生学习微积分的"拦路虎". 如何处理极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义众说纷纭，甚至有人提出替代 $\varepsilon-\delta$ 定义的思路. 如张景中院士提出用"不等式法"取代 $\varepsilon-\delta$ 定义，是一个大胆尝试，但并未得到推广. 所以，理解 $\varepsilon-\delta$ 定义仍然是一个艰巨任务. 极限是研究无限逼近的数学无限概念，从无限的视角剖析极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义，目的是探索学生更好理解 $\varepsilon-\delta$ 定义的途径.

4.1 $\varepsilon-\delta$ 定义中包含的无限是"有分界"的无限

（1）ε、δ 具有任意性和存在性的双重内涵.

ε 具有双重性，一方面，它代表任意大于0的正数，取 ε 可以，取 $\frac{\varepsilon}{2}$，$\frac{\varepsilon}{3}\cdots$ 也无妨，不影响它的任意性；另一方面，ε 一旦给出就代表一个给定的量，可以由 ε 确定出 δ 值，δ 常常表示为 $\delta(\varepsilon)$.

δ 取决于 ε，所以 δ 也有双重性，一方面，它是由 ε 决定的、与 x 有关，ε 是任意的，δ 也具备任意性. 另一方面，它要求具备"存在性"，是实实在在存在的量.

ε 和 δ 双重性暗含"潜无限"和"实无限"的和谐统一，无限和有限的融合. 如果对于 ε 只看到它的任意性，没有看到它的确定性（一旦给出，可以看成确定的量），就难以理解由 ε 决定 δ 的推理过程；如果只看到 δ 的存在性，而无视 δ 的任意性，则无法理解"无限逼近"内涵. 对 ε 和 δ 的内涵理解要做到"既要见树木，也要见森林".

（2）无限操作过程的分界性.

任意 ε 代表无穷多项；但并不要求所有项的逼近，而是分界值 N 后面的无穷项；用无穷项作逼近，没有必要用所有项逼近. 整个过程是无限操作过程. 具体图式如图2.

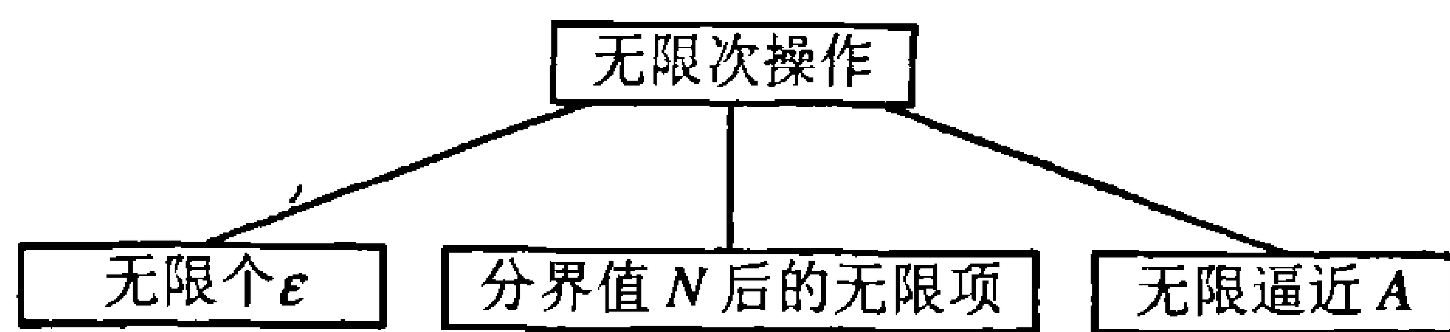


图2 无限操作过程

在 $\varepsilon-\delta$ 方法中，对于任意的 ε，找到的 $\delta(\varepsilon)$ 也可以看作分界点，界内的无限点都满足 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 至于界外的点是否满足无关紧要. 需要的是"分界值"内的无限项，不一定需要所有项. 并且分界点并不唯一. $\varepsilon-\delta$ 方法的无限操作过程具有"分界性".

（3）$\varepsilon-\delta$ 定义中的"无限"思辨方式分析.

从表面上看，极限似乎完全演绎了潜无限思辨方式，"越来越逼近"、"无限趋近"、"要多靠近有多靠近"等语言似乎明白地诠释了潜无限. 事实并非如此，从潜无限到实无限的飞跃或许有个临界[1]. 其实 $\varepsilon-\delta$ 定义中蕴涵着实无限思辨. 如图3所示，任意 ε 代表无穷个数，分界值 N 后面的无穷项都暗含着可以达到的实无限，无限次操作也是可以完成的实无限操作. 只有理解了 $\varepsilon-\delta$ 定义中的实无限涵义才能真正理解极限的定义.

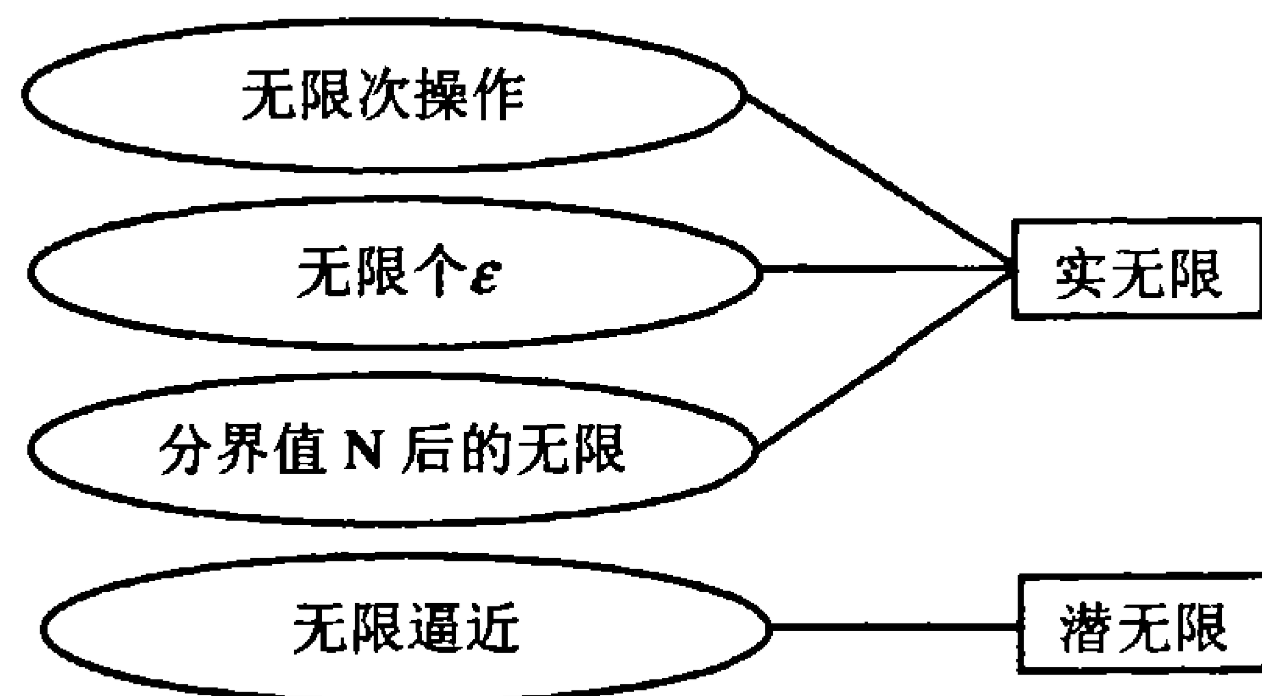


图3　实无限与潜无限

（4）从集合论角度理解$\varepsilon-\delta$定义中的“有分界”的无限.

$\varepsilon-\delta$方法中的满足不等式的无穷点是有“分界”的无穷，不是所有项的无穷．这一点可以从集合论角度加以诠释.一个无穷集合去掉部分有限项，无穷集合仍然有无穷项，有限项的取舍不影响集合的无限性，Cantor称这种性质为无限集合的“部分对应整体”，是无限集合的本质．从集合论理解$\varepsilon-\delta$定义的“有分界”的无穷，可以更清晰梳理无穷的涵义．以数列极限为例画图（图4）说明.

N相当于一个分界点（并非唯一），临界值N右边的数都符合不等式$|a_n-A|<\varepsilon$，至于左边的有限项是否符合无关紧要，部分有限项的取舍根本不会对无限集合的本质造成影响.

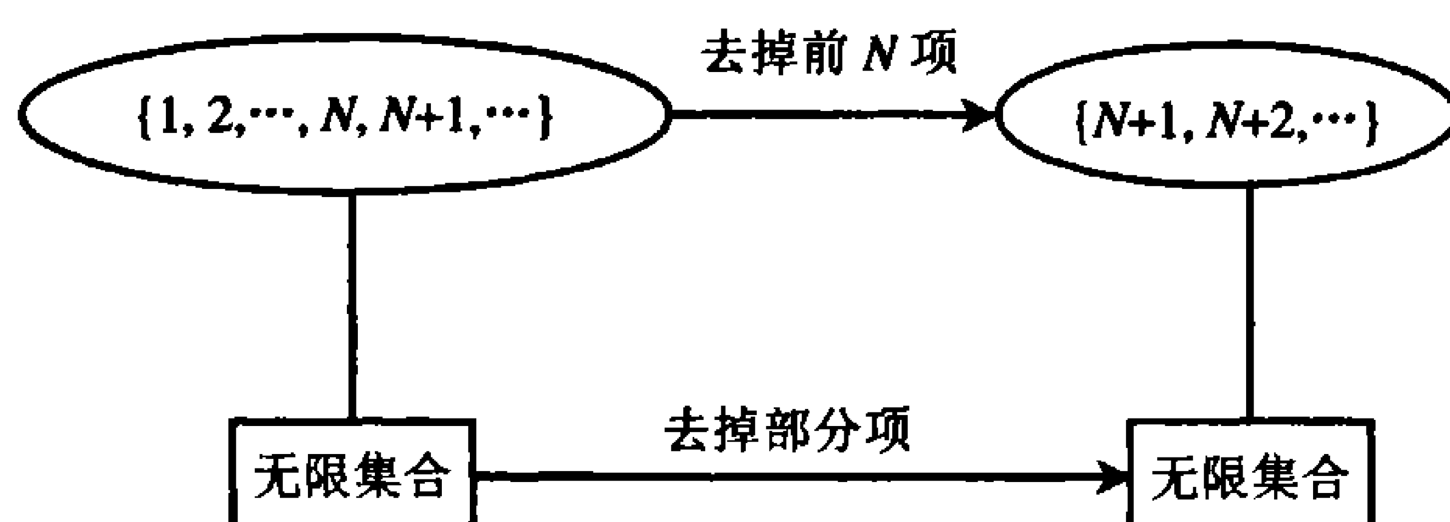


图4　以数列极限为例

4.2　个案访谈3——对$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$的$\varepsilon$-$\delta$定义证明过程的讨论

研究对象：高三学生杰、栋、宇、豪、芹、悦、硕、枫，时间是刚学完$\varepsilon-\delta$定义，准确地说只上了两次$\varepsilon-\delta$定义课.

研究形式：组织集体讨论.

主试：大家刚刚学了$\varepsilon-\delta$定义吧，有什么感想？

悦：我感觉好像程序化，不像证明.

主试：我们一起来看看书上的例子$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$的$\varepsilon-\delta$定义证明过程，好吗？

{$\forall\varepsilon>0$，要使$|\frac{1}{n^2}-0|<\varepsilon$，只要$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon$，$n>\frac{1}{\varepsilon}$，取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$即可}

主试：为什么可以将$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon$这样放大处理呢？

杰：因为只要找到N就可以了.

杰：因为$\frac{1}{n}$简单一些，$\frac{1}{2n}$也可以吧，设$n>1$，不放大也行.

芹：N可以不唯一，这就是我不懂的地方.

硕：我也有变魔术的感觉.

杰：好像只有N后面的项满足不等式就可以了.

豪：可是，为什么不是要求所有项都满足不等式$|\frac{1}{n^2}-0|<\varepsilon$呢？有点不明白.

杰：没有必要．这样就无法操作了.

宇：似乎不像以往的证明那样明白.

枫：感觉好像不太习惯.

分析：高三学生杰表现得与其他同学的最大区别是搞懂了为什么“只有找到N就行”的道理．而其他同学的困惑就在这里．其他同学更习惯于一般的演绎证明，而不能适应存在性证明．杰实质理解了$\varepsilon-\delta$定义是有“分界”的无限项逼近，所以能够把握存在性证明的实质．不理解$\varepsilon-\delta$定义的“有分界”无限的学生的外部表现是难以理解证明过程中的“适当放大”，在证明过程中表现为不能灵活运用“适当放大”．深度理解$\varepsilon-\delta$定义中的“有分界”的无限，即不是所有项的逼近，而是分界点后的无限项的逼近，对于学生理解$\varepsilon-\delta$定义意义重大.

学生能否抓住$\varepsilon-\delta$定义中的“有分界”的无限，是理解$\varepsilon-\delta$定义的关键．这与学生的无限水平有关．实证研究看出，杰是一个无限水平较高的学生．如果学生的无限直觉水平、无限分析能力较差，很难想象他能够深刻理解$\varepsilon-\delta$定义，能够游刃有余地操作$\varepsilon-\delta$定义；相反，学生无限直觉水平、无限分析能力较高无疑能促进他对$\varepsilon-\delta$定义的理解．理解$\varepsilon-\delta$定义中的“有分界”的无限意义重大．正如（Fischbein, 2001）所说，接受无限的定义，定理和逻辑推断是一回事，在各种真实的，心理情境中思考，解释无限又是另一回事[3].

5　教学启示和建议

5.1　启发学生整体认知数学概念

首先，教学中应帮助学生挖掘概念背后的实无限思想，培养学生的无限观.

学生无限思辨的自发方式是潜无限，实无限是发展而来的．实无限隐藏在数学概念中，需要学生深入思考才能领会．教学中应深刻挖掘数学概念中包含的无限思想、无限一有限的转化策略，将无限的教育落实到具体的数学概念中，进一步加深学生对数学无限概念的理解，注重培养学生的无限观.

其次，应帮助学生分析概念中隐藏的无限．对函数、单

调性、奇偶性、交换律等中学重要数学概念和数学规律中的实无限要加以深刻剖析，使学生对实无限的无意识认识变为有意识理解，让学生的认知从模糊变清晰，使无限思想清晰浮出水面．具体途径是启发学生整体认知数学概念，从整体着手理解概念．从哲学的角度讲，人们过分关注细节，就容易忽视整体效果．拔高层次从整体思维，或许可以看得更深．

5.2 教学中注重对 ε-δ 定义中的“有分界”的无限的诠释

$\varepsilon-\delta$ 定义中的无限项是“有分界”的无限，不要求所有项的逼近．这隶属学生的理解层面，教师如果有意识地指出这一点，从无限操作过程、无限思辨方式、ε、δ 本身具有的任意性和存在性的双重内涵、集合论知识角度详细诠释“有分界”的无限涵义，使学生更容易理解证明中的“适当放大”，从而深刻理解 $\varepsilon-\delta$ 定义的操作性内涵．并把这种方法贯穿于概念讲解始终，学生对 $\varepsilon-\delta$ 定义也许更容易入门．

5.3 对中学教材体系安排的一点建议

在数轴的教学中增加数轴无限性．不仅让学生深刻理解“有理数在数轴上的表示”，而且有利于初二的实数教学，有利于学生理解“实数与数轴上的点一一对应”．学生容易受生活经验的负面影响，数轴是数学抽象化的概念，不是“温度计”的翻版，给学生指出数轴的无限性，有利于学生更好地理解数学上的数轴概念．

如何作好初中、高中教材的衔接一直是教育工作者关注的焦点．以函数单调性为例，函数单调性可以整合到高中直接详细讲解，没有必要分初中、高中两次学习，时间跨度两年．由于前一次学习中，单调性内容不作较高要求，学生对单调性的错误直觉有可能对高中的单调性学习产生负作用，学生不易认识到函数单调性中的无限，不利于学生对单调性的准确、深刻理解．遵循以学生为本的思想，建议教材重新安排函数单调性．

[参考文献]

[1] Davis, Hersh. The Mathematical Experience [M]. Mariner Books, 1998.

[2] 徐利治．无限的数学与哲学[J]．高等数学研究，2007，(1)：3-7.

[3] Efraim Fischbein. Tacit Models and Infinity [J]. Educational Studies in Mathematics, 2001, (48): 309-329.

Beginning from Actual Infinity of Monotony of Function——About the Research Involving the Cognition for Students to Concealing Infinity of Mathematics Concepts

ZHANG Wei-ping

(Mathematics Science College of Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: How do students cognize the concealing infinity under mathematics concepts? From the cultivation of infinity idea, the editor discussed status of cognition of 12 grade to actual infinity under such mathematics concepts or rule as monotony, parity, permutation through practice research, analyzing the main affecting factor of infinity cognition of students of whole cognition. The $\varepsilon-\delta$ definition of limit was the general difficult point for students. From the infinity aspect, the editor discussed the cognition for students to implicit infinity with limit under $\varepsilon-\delta$ definition, analyzing it's significance to learn $\varepsilon-\delta$ definition for students. On the basis of practice research, the editor pointed out the serious didactical suggestion.

Key words: implicit infinity; the whole cognition; the infinity with boundary

[责任编校：周学智]

第17卷第2期 数学教育学报 Vol.17, No.2
2008年4月 JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION Apr., 2008

在解题中学解题
——单墫教授解题思想评介

李 祎

（福建师范大学 数学与计算机科学学院，福建 福州 350108）

摘要：单墫教授认为，解题是数学学习的中心，解题是一门实践性的学问，必须通过解题学解题．为此，单教授指出：要做高质量的数学题目，要善于独立开展解题活动，要从简单的开始做起，要勤于进行解题总结．

关键词：解题；解题思想；解题实践

中图分类号：G426 **文献标识码**：A **文章编号**：1004-9894（2008）02-0017-04

单墫教授是国内知名的数论专家，同时在数学普及与竞赛方面做出了突出贡献．单先生具有很强的解题能力，堪称真正的数学解题大师．他关于解题的精彩论述，集中体现在其专著《解题研究》一书中．通览全书可以发现，他的思想质朴而精深，语言平实而凝练，文中题目丰富多彩，解法新颖独特，读来耐人寻味，发人深省．笔者曾从“解题应力求简单、自然”的视角入手，对他的解题思想做过剖析[1]．下面再试从“解题实践的重要性”的视角入手，来阐述他的又一重要思想——在解题中学解题．

1 解题实践的重要性

1.1 解题是数学学习的中心

“问题是数学的心脏”（哈尔莫斯），所以，在单先生看来，学习数学主要就是学习解题．“解题，是数学的一大特点．其它的学科，例如语文，也需要习作，需要命题作文，但其数量与种类均不能与数学的习题相提并论．”[2]单先生认为：对于学生而言，所谓“数学尖子”，无非是多做了一些题，掌握了一些解题方法；对于数学教师来说，最需要加强的是他的数学水平，而数学水平也就是解题的能力．著名数学家波利亚也认为，数学是由“知识”和“才智”两部分组成的，而在数学里，才智比起仅仅具备知识，要重要得多．在数学里，才智就是解决问题和批判地去检验解答的能力[3]．波利亚曾有一句脍炙人口的名言：“中学数学教学的首要任务就是加强解题的训练．”正是因为解题在数学学习中的独特地位，所以世界许多国家都把“problem-solving”（有人译为“问题解决”，而在单先生看来，其实就是解题）作为数学教育的中心．比如，20世纪70年代，美国数学指导委员会曾提出过：“学习数学的目的在于解题．”1980年，美国数学教师协会公布了一份名为《关于行动的议程》的文件，明确提出“必须把解题作为20世纪80年代中学数学的核心”，“数学课程应当围绕着解题来组织”．

需要说明的是，单先生所谓的“解题”，是广义上的数学解题，即不仅包括常规意义上的解题训练，也包括以问题形式而开展的公式、定理的教学．如他指出：“做习题并不只是在学完一个方法或一些知识之后．知识、方法应当尽可能地通过问题的形式引入．”[2]这样，小至一个学生算出作业的答案、一个教师讲完定理的证明，大至一个数学猜想的获证、一个数学疑难的解决，都可以叫做解题．

1.2 解题是一门实践性的学问

解题是一门实践性的学问，要想有效地学会解题，提高解题能力和数学水平，就必须亲身进行解题实践．单先生曾以“学骑自行车”作类比，生动地阐明了解题实践的重要性．波利亚也曾以“学游泳”作比方，说明了必须“通过解题学解题”的道理．然而，对于解题实践的重要性，单先生认为：“仍然有很多人认识不足，甚至认为教师只需要研究数学‘理论’，不需要解题．一谈解题，就是‘题海战术’．所以不少从事教育的人绝口不提‘解题’，真是咄咄怪事．”[2]当然，强调数学解题实践，重在强调解题者的思维参与，意在凸显解题的过程性，而不能仅仅满足于问题答案本身．一个人拿到问题之后通过翻看习题集的答案，他便能简单地讲出或写出这个答案，但从解题学习的角度来看，显然不能认为他解答了这个问题．正如前苏联解题专家弗里德曼所指出的：“解题的意思不单只是求出答案，而还有某种别的含义．”[4]

正是基于对解题实践重要性的认识，所以从解题研究的角度来看，单先生认为，任何讲授“解题理论”或“解题学”的书，如果不能提高解题能力，或帮助更好地教解题，更好地教“教解题”，那么不管它如何“系统”，如何“理论性强”，也是毫无用处的．其实在他看来，解题并不需要太多的理论，而一些解题要诀反倒更切实用．在他所概括和总结的12条解题要诀中，多是需要在解题实践中付之于行动的[2]．

1.3 通过解题形成知识组块

认知科学认为，知识在人的头脑中并不是散乱贮存的，而是以“组块”的形式分类保存的．面对新的问题，首先要确定“类别”，对“组块”检索，使有关的组块作为有用知

收稿日期：2007-11-10

作者简介：李祎（1971—），男，山西临汾人，副教授，博士，主要从事课程与教学论研究．

识被调动起来，从而为解决面临的问题提供必要的基础. 大量学习研究也表明，优、差生存在成绩差异的主要原因，在于知识组块的数量、质量的区别及调节策略的应用. 要科学地建立知识组块，就不能把知识无序地装在大脑中，而应通过分类、比较、联系等途径，使零散知识压缩成更密集的组块，这样，既便于记忆又便于检索，一旦遗忘又易于恢复. 或许正是基于解题实践中对此方面的感性认识，单先生曾辟专节阐述了解题中知识组块的重要性[2].

所谓解题知识组块，是指数学基本命题及其常用衍生性结论，与数学思维的各种方法和招数进行意义联结，从而形成的一种有效组合. 用单先生的话来讲，这种组合就如同家电中的集成块，或拳击家的组合拳，它可以简缩思维形式，加速思维进程，降低思维的“能耗”. 它具有知识和思维的双重品性，是镶嵌在解题认知结构上的明珠，是解题认知系统得以有效运作的枢纽. 这种解题知识组块积累的越多、质量越高，那么解题者的解题能力就越强. 比如，长期解题实践可以发现，在遇到形如 $\sqrt{(\,)^2+(\,)^2}$ 的表达式时，有时需要联系勾股定理，有时要想到两点间的距离公式，有时则要用到同角三角函数公式，等等. 这样，通过不断地积累和总结，便会在解题认知结构中建立起一个以 $\sqrt{(\,)^2+(\,)^2}$ 为中心而组织起来的解题知识组块，在需要应用构造法、三角代换法等解题时，便可以迅速提取和灵活运用.

1.4 通过解题养成数学“题感”

学音乐的人需要有乐感，学语言的人需要有语感，打球的人需要有球感. 任何技艺的精湛，其实都离不开实践的感悟. 学习数学同样需要有良好的数学感觉. 按照单先生的观点，所谓数学感觉，“主要指对数量的大小、图形的对称……一般地，指对研究对象的内在规律或内在联系的把握程度”[2]. 解题时的“题感”，也是数学感觉的一个反映. 单先生特别重视“题感”在解题实践中的重要性. “思路，其实是说不清的. 你必须亲自解题才能体会到这一点，解题时迈进的每一步，不完全靠逻辑，更多地是靠你的感觉.”[2] 经过反复的探索，题目做得越纯熟，“题感”就越好. 有了良好的“题感”，那么你便可以“大胆地跟着感觉走”. 事实上，解题大师的权威性，并不一定在于他们占有多少可以传递的知识，更主要地在于他们拥有难以言表的良好“题感”. 通常我们所说的解题经验，其实多半指的就是一种直觉性的“题感”.

依照迈克尔·波兰尼的个人知识理论，通过长久的学习和实践，可以生成大量的默会知识，这些知识带有较强的个人色彩，难以清晰地表述. 这里所谓的“默会知识”，就主要地包含了感觉的成分. 在数学解题领域，波利亚曾指出：“天才能在不知道有规则的情况下按照规则行事. 专家能在不想到规则时按照规则行事，但只要需要，他就能讲出应用于该情况的规则.”[3]实际上，包括“题感”在内的默会知识，有些易于言说，比如，“三角形中，与中线有关的问题常常将中线延长成为原来的两倍”，“与角平分有关的问题，常常利用关于平分线的反射”. 更多的默会知识也许仅仅是一种“感觉”，很难通过传递被人掌握，主要在于解题行动中用心去体悟. 如同学骑自行车，如何拐弯、如何用力捏闸，只能通过具体实践去揣摩.

以下是单先生为此所作的示例分析[2].

例1 已知 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个正数，满足 $a_1a_2\cdots a_n=1$，求证 $(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant 3^n$.（1989年高中数学竞赛题）

表面上来看，这道题技巧性很强，将2分解成1+1不易想到. 但实际上，可以用分析的方法说明这样做的合理性. 更重要的是，在实际解题中往往凭借的是一种良好的数学感觉：知道 a_i 平均看来与1相当，而不是与2相当. 所以，不宜将 a_i 与2直接作平均，而应当将2拆为1+1，再与 a_i 合起来作3项的平均.

2 在解题中学解题

2.1 做高质量的数学题

单先生认为，要提高自己的解题本领，必须做高质量的数学题. 因为解题如同下棋，只有和较高水平的人切磋，棋力才有长进；同样，只有做一定数量的高质量题目，数学水平才能提高. 所谓高质量的题目，主要指的是具有一定难度的、非常规性的数学问题. 因为在他看来，数学题目通常可分为两种，一种是常规题，有固定的套路可循，例如解一元二次方程. 按照波利亚的说法，这类题目“只要直接机械地用一下法则或直接机械地模仿一个例子就可以做出来，同时，所要用的那个法则或要模仿的那个例子又放在学生的鼻子底下”[3]，因此，它除了提供演习之外别无任何其它. 它也许能教会学生去照猫画虎，此外很少有可能教会他别的什么东西. 另一种是没有固定套路的题目，往往需要解题者发挥自己的创造性，例如带有竞赛意味的问题. 在单先生看来，要培养学生的创造性，就必须解一些没有固定套路的题目. 尤其是对于优秀的学生而言，还应当做相当数量的竞赛题，这会对自己的水平有很大的提高.

单先生强调非常规题的重要性，但从来没有轻视常规题的训练. “常规问题是基础，登高必自卑，行远必自迩. 常规问题做好了，才能做更难的竞赛性的问题. 反过来，常规问题都做不好，却一味找难题去做，好高骛远，注定要失败.”[2]他反对的是让学生做大量的重复性的题，因为这会“扼杀学生的兴趣，妨害他们的智力发展”. 为此，单先生对所做题目的“应然”特点，先后提出了两条具体要求：一方面，最好每一道题都有一点新意，要做一些有变化、带技巧的题，以掌握更多的新方法、新技巧，决不要老是简单地重复做那些已经掌握了的习题[2]；另一方面，必须做一些含有推理、论证的问题，因为这种问题比一般的计算题、求解题难度大，更有利于增长智慧[2]. 此外，从教师教学的角度来看，按照波利亚的思想，也许还可以再加上一条，即要做一些“通过这道题，就好像通过一道门户，把学生引入一个完

整的理论领域”的题目．当然，这样的题目为数不多，从解题学习的角度来看，并不具有普遍意义．不过，波利亚就此发表的教学主张，倒是极富有启发性，即教师抑或学生不要穷于应付过量的题目，要集中力量于某几个真正有意义的问题，通过发掘问题的各个方面，从容不迫而彻底地讨论它们．

2.2 善于独立开展解题活动

在教学实践中经常可以发现，有些学生平时一听就懂、一看就会，但真正到考试解题时，往往一做就错，甚至干脆无从下手．这多半是由于学生缺少独立解题的经验所致．在日常学习中，有些学生往往没作深入思考和分析，就急于求助答案集或老师和同学，表面上来看省时又省力，似乎效率非常高，但却无法真正领略到解题过程的精髓．单先生特别强调独立解题的重要性．在他看来，寻求问题的解法不能教会，而只能自己学会．“数学是思维的科学”[5]，这样，解题的要义就不是答案本身，而在于解题的思维过程．直观感知、观察发现、归纳类比、空间想象、抽象概括、符号表示、运算求解、数据处理、演绎证明等一系列思维过程，都需要学生通过自己的独立活动来亲身经历，任何其他人都无法替代，“越俎代庖”的结果必然是学生思维独立性的丧失．就这一意义而言，从教师教学的角度来看，他所主张的“无备课”式的解题教学，就具有很大的合理性．因为教师课前的精密筹划，往往不自觉地会影响到其在课堂上的现场独立发挥，这样学生也就很难看到教师解题的真实思维过程，其教学意义也就会“大打折扣”了．当然，这一教学形式的具体实施，要依赖于教师水平，要考虑到教学时效，不切实际地盲目推行，很可能是事倍功半，这也是单先生所不愿看到的．

当然，强调独立解题的重要性，并非绝对地不能依赖于答案或他人．“由于时间所限，有时也可以只做一半或 1/3，甚或完全看解答．”[2]对教师而言是这样，对学生也是如此．尤其是在课堂教学中，学生的独立性显然是相对而言的．正如波利亚所指出的：“学生应当获得尽可能多的独立工作的经验．……教师应当帮助学生，但不能太多，也不能太少，这样才能使学生有一个合理的工作量．……如果学生没有能力做很多，那么教师至少应当给他一些独立工作的感觉．”[4]除此之外，在单先生看来，善于独立开展解题活动，还有另外一个重要意义，那就是：现成的解答未必是最好的解答：“尽信书，则不如无书”（孟子）．他强调指出：“应该自己睁开眼睛开，切莫被人牵着鼻子走．如果有别人的或书上的问题解答，千万注意不可盲从，很多现成的解答并不是最好的解答，有的甚至十分拙劣，与其被这种解答牵着走，不如自己去想．”[2]为此，他针对许多考题、赛题的现成解答中存在的一些瑕疵，或其它书刊资料中习题答案存在的诸多弊端，独立地给出了自己的解答．

2.3 从简单的开始做起

“天下大事，必作于细．天下难事，必做于易．”人们认识事物的过程，都是从简单到复杂，由表及里、逐层深入的过程．具体到解题学习中，也概莫能外．在单先生总结的 12 条解题要诀中，其中有一条就是“从简单的做起”[2]．仔细研读和剖析不难发现，他的这一重要思想，实际上包含了以下两层具体含义．

（1）从简单的题目做起．

“要做一道复杂的问题，往往需要先做一道简单的问题．反过来，简单的题做得很熟，复杂的题也就不难了．”[2]这是因为在他看来，对一位老练的解题者来说，很多简单的题已经融合在一起，像电视机或音箱中的集成块，像围棋中的定式，也像拳击家的组合拳，可以在一刹那间发动连续攻击，不必多费脑筋．所以在解题学习时，应根据自己的能力和水平，先去解那些看似简单、却很重要的题目，以不断提高解题速度和能力．随着速度和能力的逐步提高，再逐渐地增加题目的难度，这样就会取得好的学习效果．其实，解题的过程不仅是循序渐进地熟练解题步骤的过程，也是不断地深入认识概念和命题的过程．概念理解不清，命题认识不透，自然无力解决任务更加繁重的难题．

（2）从简单的情形入手．

从简单情形入手，先退后进，以退为进，进退结合，这是一条重要的思维策略，同样也可应用到解题当中．华罗庚先生就曾说过，解题时先足够地退，退到我们最易看清楚问题的地方，认透了，钻深了，然后再上去．他认为，善于“退”，足够地“退”，退到原始而不失去重要性的地方，这是学好数学的一个诀窍．那么，“退”有什么具体的好处呢？单先生认为：“首先可以熟悉题意，通过具体实例，弄清题目的条件和结论．其次，先解决简单的问题，可以增强自己的信心……最后，也是最重要的一点，简单、特殊情况的解决，往往给我们很多的启发，往往指出一条解决一般问题的道路．”[2]具体到解题实践中，“退”的形式是多种多样的，可以从一般退到特殊，从复杂退到简单，从整体退到部分，从抽象退到具体，从高维退到低维，从较强的结论退到较弱的结论．这样，简单的情形、特殊的对象解决好了，复杂的问题处理起来就比较容易上手．

2.4 勤于进行解题总结

“注意总结”也是单先生总结的 12 条解题要诀之一．首先，“总结”最直接的功能是将解法简化．“在解题时总免不了会走一些弯路，只有通过总结，才能除去那些不必要的步骤，弄清问题的关键所在，使思路明晰起来；才能抓住问题的本质，给出一个简单、优美、漂亮的解法．”[2]因为在他看来，过于详细的解答反而淹没了主要的思路，弊多益少．要取得长足的进步，就应当从解答中提炼出主要步骤．其次，“总结”也是掌握解题规律、积累成功经验和失败教训的过程．“也不是题做得越多越好．‘歪拳打三年’也成不了拳师的．在解题时应当注意总结规律．”[2]为了做好总结，解题后要多问几个为什么．比如，解题的难点是什么？关键是什

么？解题时使用了哪些基本方法？运用了哪些基本概念和原理？不同解法的优劣如何？题目是否可进行变式推广？原解法对变式题的适用性如何？等等.通过长期不懈的坚持总结，就可以养成一种敏锐的“题感”，这样就能“在解题时，抓住关键，单刀直入，立即深入问题的核心，不致永远是战战兢兢地‘摸着石头过河，走一步看一步’”[2].

借用华罗庚先生的说法，如果多做题是“由薄到厚”的学习、接受的过程，那么尚总结就是“由厚到薄”的消化、提炼的过程，也是“去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里”的增识过程．多做题，就可以多见、多知、多学；尚总结，便可以见而识之、知而识之、学而识之．这样，便能从解题中获得见识、知识和学识.从认知心理学的角度来看，多做题、尚总结的目的，其实是为了生成一个良好的解题知识网络，这一知识网络的系统化、条件化、策略化和自动化的程度越高，那么解题者表现出来的解题能力就越强．在教学实践中，经常可以发现这样的现象，即，教师解题通常总胜过学生一筹，而用到的知识和方法又是师生所共知的，学生总是埋怨自己为什么“知道”但“想不到”．究其原因，主要是因为教师通过长期的解题实践和总结，头脑中有一个组织良好的解题知识网络，在适当的情形他便能灵活地提取和应用．而有些学生平时不善于进行概括和总结，他们的脑海中往往只是一些孤立的知识点，解题知识网络的系统化程度不高，当需要时无法自觉、顺利地进行检索和提取．正是基于对解题总结的重要性的认识，所以波利亚也特地把“总结”列为了解题四环节之一，并指出：“工作中最重要的那部分就是回去再看一下完整的解答.通过考察他的工作过程和最后的解答形式，他会发现要观察认识的东西真是千变万化，层出不穷．”[6]

以上仅是对单先生现成思想的部分总结.单先生解题方面著述颇丰，更多思想渗透在其解题中的字里行间，有待广大读者亲自去挖掘、提炼和品味.

[参 考 文 献]

[1] 李祎．数学解题应力求简单、自然——读“解题研究”一书有感[J]．数学通报，2006，(10)：25–28.

[2] 单墫．解题研究[M]．南京：南京师范大学出版社，2002.

[3] G•波利亚．数学的发现——对解题的理解、研究和讲授（第二卷）[M]．刘景麟译．呼和浩特：内蒙古人民出版社，1981.

[4] Л．М．弗里德曼．怎样学会解数学题[M]．梁法驯译．武汉：湖北教育出版社，1985.

[5] 单墫．数学是思维的科学[J]．数学通报，2001，(6)：1–3.

[6] G•波利亚．怎样解题——数学教学法的新面貌[M]．涂泓译．上海：上海科技教育出版社，2002.

Learning Problem-solving by Solving Problem

LI Yi

(Mathematics and Computer Science College, Fujian Normal University, Fujian Fuzhou 350108, China)

Abstract: Professor SHAN Zun thought that problem-solving was the heart of mathematics learning, problem-solving was the practicing knowledge, we must learn problem-solving by solving problem. To this end, SHAN Zun pointed out that we must solve good mathematics problem, and be good at independently solving problem, and start with simple problem, and often summarize experience about problem-solving.

Key words: problem solving; thought of problem-solving; practice of problem-solving

[责任编校：周学智]

第17卷第2期 数学教育学报 Vol.17, No.2
2008年4月 JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION Apr., 2008

数学探究教学中异化现象探析

潘小明

（泰州师范高等专科学校，江苏 泰州 225300）

摘要：数学探究教学在教学内容方面的异化现象有不少数学教学内容并不适合学生探究，不少教师在设计数学教学方案时不能考虑到相关问题；在教学方法上的异化现象有数学探究过程的有形无实，数学探究教学途径的迷失等；在教学评价方面的异化现象有对学生成长评价的迟钝，对学生自我评价的忽视等．克服异化现象的途径有：数学教师本人应加强学习，自觉地防止过度帮助学生的行为，提倡在教师主导下的有效讨论等．

关键词：数学探究教学；异化现象；原因分析；思想认识

中图分类号：G632.4 **文献标识码**：A **文章编号**：1004-9894（2008）02-0021-04

数学探究教学强调在数学教师的指导下，以数学教学内容或相关的问题为载体，通过运用一定的教学方法与教学组织形式，把学生数学学习过程中的发现、探究等数学认识活动呈现出来，使学生经历发现问题、提出问题、解决问题的数学活动过程，并在此过程中理解数学概念，掌握数学思想、数学方法，养成数学态度，培养初步的研究意识．它既是一种数学教学方法，又是一种数学教学思想，倡导学生自主探索、主动学习是数学探究教学的主要特征[1]．随着数学课程改革向纵深处发展，数学探究教学正在从理论层面的"应然"性探讨转变为现实课堂教学中的"实然"性操作，为数学课堂教学带来了前所未有的生机和活力．考察中小学数学课堂教学实践发现，尽管有越来越多的教师在数学探究教学的设计与实施中表现了许多的热情和创意，但是就目前的现实而言，中小学数学探究教学的实践中尚存在着一些异化现象（哲学上把自己的素质或力量转化为跟自己对立、支配自己的东西称为异化），应予以高度的关注．本文拟结合实践考察与原因反思，对相关异化现象进行初步分析，以期有益于更多的一线教师在实际教学中能对此自觉地防范和克服．

1 数学探究教学中的异化现象

1.1 从教学内容来看

异化现象一是不少数学教学内容（如集合的定义、表示方法，一元一次方程的求解，无理数的概念）本身并不适合学生探究，但却被许多教师硬生生地上成了数学探究课．即便在一些总体上适宜于探究的"问题解决型"的数学课堂教学中，不少教师也没有认真思考局部的、具体的问题是否适宜于探究（有的太易、有的太难），教学效果常常不佳．如在某重点初中一年级的课堂上，老师就"生活·数学"这一主题要求学生探究如下两个问题：（1）下水道的井盖为什么是圆的？（2）为什么下水道的出入孔是圆的而不是方的？结果部分学生议论了一通，但根本切中不了要害，而另有学生则表示他们感到问题很难，自己回答不了．这是不奇怪的，因为这两个题目也曾经难倒过许多到微软公司应聘的员工！

异化现象二是不少教师在设计数学教学方案时不能充分地考虑在"什么时间探究、用多少时间探究、探究到什么程度"等相关问题，不能理性、冷静地设计切实、可行的数学问题情境及教学展开过程．主要表现有：（1）数学问题情境无有效的呼应与互动，许多非本原性数学问题情境不能在数学探究内容和学生探究求知心理之间制造出有效的"不协调"，不能把数学探究的技巧与情景一起融入到揭示、理解并欣赏数学学科本质的数学活动过程中，难以按预设进程顺畅有效地展开教学，并导致了学生"探究兴趣"的丧失、"探究目标"的偏离；（2）在课堂教学中，有些数学探究任务的坡度被设计得过"缓"或过"陡"，调动不了学生的积极性，学生思维呈"惰性"状态，在单元教学的进程展开中，有些进程被设计得过快，许多有探究价值的"中介性"、"过程性"内容被师生"一滑而过"．例如，囿于教材等因素，初二的数学教师在引导学生学习了"图形全等"的概念以后常常立即要求学生探究"平行四边形"的性质，对"三角形全等"等有价值的内容却没有给予充分的重视，不仅难以引发学生在"最近发展区"内进行有效的数学探究活动，而且使学生体验和感悟问题的机会在不经意间流失，不少学生对四边形的认识显得较为肤浅．

1.2 从教学方法来看

异化现象一表现为适时、适度"因材施探"理念的失却．具体表现为教师不能根据学生差异以及探究主题内容的不同合理选择具体教学方法，对于同一课时不同要求层次的数学活动，不能准确把握何者采用数学探究教学，何者不采用数学探究教学，不能针对不同教学内容辩证地施用具体的探究教学模式，不能合理利用学生在数学探究过程中动态生成的教学资源．比如，在一节关于等差数列概念及其性质的教学中，有一位学生举手提出了这样一个问题："老师，既然有等差数列，那是不是也一定有等和数列？"对此，老师却简单地回答道："书上可没有这么讲，你不要乱想！"果真如此吗？课后访谈了那位提问的学生，他不仅举出了诸如"1，2，1，2，1，2，……"等多个"等和数列"的例子，而且说明了它们具有的特征：从第二项起，每一项与前一项之和都等于一个常数，说出了它们的一般表示：a，b，a，b，a，b，……指出了它们的两个性质：（1）等和数列必定是周期数列；（2）等和数列也一定是等积数列．

收稿日期：2008-01-20

作者简介：潘小明（1969—），男，江苏江都人，副教授，主要从事数学课程及数学论研究．

异化现象二表现为数学探究过程的有形无实.不少数学探究活动可称之为“工匠式”、“圈套式”、“标签式”等伪数学探究活动.在一些“工匠式”数学探究活动中，教师常常关注学生表面的动手操作，如剪一剪、折一折、量一量、画一画等，许多活动看起来热闹，但缺乏真正的数学内涵，数学思维的质量不高.在一些“圈套式”数学探究活动中，教师一般通过精心设计的一系列“铺垫”性问题，引导学生探究相关的数学概念或者结论，但教学过程中学生因不能清晰地理解每一步“铺垫”的意图产生不了内驱的数学探究需求，相应的探究活动实际上是被教师牵着走，仅仅是在教师指令（设圈）下被动的“探究”.在一些“标签式”数学探究活动中，教师一般一开始就抛出一个“探究性问题”，让学生独立（或以小组为单位进行）探究，但由于所给问题或与学生已有知识“潜在距离”过小而缺乏挑战力与探究性，或是两者间“潜在距离”过大（超出了学生认知水平）而难以展开探究，探究性问题事实上就成了“开场秀”或“敲门砖”.

异化现象三表现为数学探究教学途径的迷失.数学探究内容性质、特点不同，数学探究教学途径和方式也应有所区别.比如，数学知识的形成性探究，要通过创设问题情景、改善认知环境，来引导学生有效地探究数学知识的形成过程；数学规律的建构性探究应立足在学生已有的经验基础上，让学生通过观察、实验、猜想、论证等，自己得出结论，在体验中建构知识；数学理论的应用性探究应使学生建立数学知识之间内在的联系，养成用数学的意识，提高用数学知识解决实际问题的能力，要从实际生活、数学教材、学生自主提问等途径中合理选择探究素材，并进行有效的教学法加工，以提高素材本身的挑战性、探索性、可延展性和趣味性等教学品质.但在现实的数学探究教学中，不少教师却违背了这些常理、迷失了数学探究教学的途径，使学生数学探究的思想、数学探究的行动常常漫无边际、不知所措，思维指向、行动指向不明，数学探究过程无序、低效.

异化现象四表现为互动失真、帮助过度.具体表现在：(1) 有些教师在数学探究过程中面无表情、语气生硬、缺乏亲和力，师生情感疏离，师生本真的互动性缺失；(2) 不少教师认为数学探究应是少数人的事，因此在数学教学中只重视、关注成绩好的学生，忽视、冷落成绩差的学生，倾向于让成绩好的学生回答一些整体性或论证性的复杂问题，师生互动持续时间较长，而仅让成绩差的学生回答探究过程中一些局部的简单问题，师生互动持续时间相对较短；(3) 不少教师严重低估学生潜在的数学探究能力，常常以自己的“讲授式探究”代替学生的“体验式探究”，剥夺了学生尝试数学和从错误、教训中学习的机会，使不少学生养成了探究依赖心理，在数学探究过程中倾向于“避难就易”、“避繁就简”，行为畏缩，老师“不讲不探”，不愿主动深入思考相关的数学问题，易于满足而不思进取.

异化现象五表现为“多媒体”的误用，不能适应数学探究的理性思维对数学活动中操作（“有方”）、模拟（“有需”）、计算（“有法”）、分析（“有规”）、假设（“有度”）、构造（“有序”）、进退（“有制”）等方面的需要，不能根据“系统分析”、“优势互补”、“目标控制”、“内容符合”、“对象适应”等原则进行“多媒体”的最优化运用[2].不少教师常常硬要把一些学生一目了然的东西搬上屏幕，把要求学生必须经过自己思考和探究才能获得的知识或过程一览无遗地展示出来，课堂上虽画面闪烁、笑声不断，但有效的双边交流活动缺乏，数学探究的激情与精神缺乏，教师、学生都被“多媒体”牵着鼻子走，前者失去了自我，后者失去了老师，当引以为戒.

异化现象六表现为教学组织形式的迷信和低控制性.主要表现在：(1) 有一些教师过分迷信小组合作探究形式、轻视其它教学组织形式的现象，不能根据数学探究教学的内容特点、对象特点，从实际出发，灵活采取个人独立探究、小组探究、大班探究等教学组织形式；有一些教师采用小组合作探究仅仅是为了显示课堂形式的多样和课堂表面气氛的热烈，或者仅仅是让小组合作探究成为课堂教学的一种插花点缀.(2) 在一些适宜采用小组合作探究教学中，存在着分组不科学、分工不到位、规则不明确的现象，并因此而产生了少数优等生的“表演场”、个别学生的“休闲场”或者热闹低效的“众言堂”等现象，小组成员对数学问题探究意识和想法没有能被有效激发，小组全员有效参与性差.(3) 在一些小组合作探究教学中，教师不是积极引导学生交流探究方法或修正错误，而是让学生进行“自流式”讨论.比如，在一节“能被3整除的数的特征”探究课中，老师一开始就向学生提出了问题：“这节课，我们要学习能被3整除的数的特征.现在请同学们4人一组讨论一下，能被3整除的数有什么特征？”约一刻钟后，学生开始举手回答——生1：“我们小组的结论是：个位上是3的倍数的数能被3整除.如63、39等.”生2：“这个结论不正确，13、26等数，个位上是3的倍数，但它们不能被3整除.”生3：“我们小组的结论是：一个数只要某一位上的数能被3整除，这个数就能被3整除.如36、132、621等.”生4：“不对！328百位上的数是3的倍数，但它不能被3整除，而147各位上的3个数都不是3的倍数，而它却能被3整除.”生5：“我们小组的结论是：一个数各个数位上数的和能被3整除，这个数就能被3整除.”老师：“很好，你们是怎样得到这个结论的？”学生5回答说：“我们是从书上看到的.”老师就此板书结论，并进行巩固性练习.

1.3 从教学评价来看

异化现象一是对学生成长评价的迟钝，不能通过有效的教学评价凝聚学生数学探究的心向、激发学生数学探究的心力.主要表现有：(1) 教师不能有效观察学生数学探究的投入状态，不能有效关注学生对数学知识内涵的理解、掌握和建构，不能有效关注学生对数学知识价值的反思能力，不能准确把握学生是否受到了数学问题情境的浸润和诱导，对学生发现问题的速度、数量、质量胸中无数；(2) 不能有效评价学生参与数学探究活动的态度、广度和深度，不能有效评价学生在数学交流过程中知识与技能的发展水平以及数学思维精细化、深刻化的程度.有一些教师甚至不管学生的思考与回答是否到位，就简单盲目地对学生进行表扬奖励，不仅丧失表扬奖励的应有价值，而且容易使学生在数学探究活动中“迷失自我”，而有一些教师则不能根据教学组织形式的变化适时变换相应的评价对象(比如，在合作探究学习中，

不能将评价对象由个体转变成小组).

异化现象二是对学生自我评价的忽视. 一般说来，数学探究教学的内容更多地是程序性数学知识，需要注重数学认知策略的习得，需要关注数学探究过程中内在的、体验的、默会的知识，课堂教学评价只有“自评”与“他评”有效结合起来才能取得预期的效果. 但在现实的数学探究教学中，由于多种原因（如评价技能缺乏、惯性影响等），教师往往不能引导学生进行有效地自我评价. 事实上，对于学生的自我评价，教师的引导作用可表现在多方面. 例如：(1) 告诉学生评价的目的，让学生明确自我评价是一种自我比较，意在发现自己学习中的问题，激励自己成功，鞭策自己不断进步；(2) 帮助学生设计好评价量表，指导学生明确各项评价内容；(3) 教会学生自我评价的方法，引导学生定期进行必要的交流、总结.

异化现象三是窄化了评价的功能. 教师常常因高考、中考中“甄别和选拔”的需要，确定数学探究教学的评价方式，强化“证明”、“管理”功能，弱化“激励”与“改进”功能，过度关注了基本知识技能的量化评价，严重忽视了数学探究过程诸多要素的质性评价. 对学生“如何参与到数学探究教学活动中，参与的程度如何，学生注意力集中程度如何，学生探究问题的主动性及深度如何，学生探究方法的掌握程度及对探究目标的达成程度如何，学生的情感、态度、价值观发展得怎么样”等要素没有能进行有效地质性评价.

2　数学探究教学异化现象背后的原因

为了克服数学探究教学中的异化现象，应当对导致异化现象的原因进行认真分析. 限于篇幅，仅围绕数学教师数学探究教学素质欠缺的原因进行相关分析.

其一，相关教师对“为什么要进行数学探究教学、什么是真正意义的数学探究教学”等根本性问题缺乏深入思考和研究，在认知方式上具有一定的从众性，并因此将数学探究学习的目标常常定位在培养学生探究能力、创新能力以及实践能力上. 这种认知初看几乎没有什么问题，因为数学教学中确实要培养学生的这些能力，甚至还要加强，但仔细思考可以发现，在具体的数学探究课中提这些能力并不具体，这就使得数学探究教学目标失去了有效的导向、定位作用. 事实上，这些能力都是建立在基础学力基础上的复合型能力，是比较宏观性的概念，它们很容易将教师导向一些宏观性、复杂性及综合性的数学探究问题，使实践中教学的难度大为增加，并因不切实际而容易在教学设计、教学方法、教学组织、教学评价等环节产生一些异化现象，使不少的探究活动过程形式化、庸俗化.

其二，相关教师对数学探究教学中内容、方法、评价的认知存在偏差. 就数学探究教学内容的认知来看，许多教师并没有认识到：在数学知识抽象过程中，如果数学知识本身具有较强的经验性、演绎性或对象性，那么，教学中从学生日常生活经验和知识基础出发，开展数学探究性学习是必要的，也是可能的；如果数学知识本身具有较强的超验性、合情性或程序性，那么，教学中这些数学知识获得的理想方式应当是通过接受性数学学习而不是探究性学习[3]. 就数学探究教学方法的认知来看，许多教师并没有认识到：数学探究教学是一种有目的、有计划、有组织的教学活动，需要教师以系统的眼光和动态的观念看待数学探究活动，并因此整合教师、学生、教材与环境之间的关系，保证探究教学方法选择与探究教学目标、内容之间具有一致性，合理区分体验型数学探究与问题型数学探究对教学方法的不同要求——前者的关键在于组织学生参加探究活动，让学生在活动中不知不觉地积累知识，后者的关键在于组织学生明确问题，然后组织学生设计解决问题的过程，对自己的探究过程有一个清楚的认识. 就数学探究教学评价的认知来看，不少教师错误地理解了考试与发展的关系，并因此掺杂了不积极的情感因素. 比如，一些教师认为：基于目前的考试制度，夯实学生数学基础比引导学生数学探究重要，重视学生笔试成绩比培养学生人文修养重要，基于这种认知与情感，相应的评价自然要缺乏发展性视野，窄化教学评价的功能.

其三，相关教师未能结合具体的课堂教学及相关专题，对数学探究教学的方法、模式进行持续、深入、有效地研究与探索，教学中显得“功力”不够. 部分教师在实践中遇到困难、挫折后在心理上产生倦怠感，并被一些消极情感不当地感染，在实践中显得“定力”不够，在随大流中淹没了教学创新. 值得一提的是，近年来，尽管有许多教师参加了各种各样的新课程理念培训班，但由于培训时间短或培训方式本身的不恰当，许多教师实质性的收获仍然不大，而以教研组活动为主要形式的校本研修也由于多种原因常常流于形式（特别地，相关理论与教学实践并没有能真正结合起来），加之习惯、惰性、工作量大和时间紧张等因素的影响，在平时的教学中，许多教师并没有积极主动地研究数学探究教学的方法、途径和手段.

其四，相关教师数学教学反思的能力弱，从事数学探究教学的技能差. 许多教师课后不能主动反思数学教学中教师和学生角色转换的关系、探究活动与数学双基的关系、自主探究与合作交流的关系、教学手段与教学目的关系、探究过程与探究结果的关系、民主开放与自律秩序的关系、学生主体性与教师主导性的关系、教学预设与动态生成的关系，不能根据各层次数学教学任务的特征判断数学探究任务所属的水平，不能根据为建立数学表象、为经历知识产生发展形成过程、为渗透数学思想方法、为建立数学模型、为解决数学问题等不同的探究目的选择不同的教学方法，采用合理的教学组织形式，运用恰当的媒体手段.

3　克服异化现象的若干思想观点

数学探究教学中的异化现象虽然还是局部的，尚未成为普遍状态，但它对数学探究教学有效性以及数学学科教学自身正常发展的影响不可小视，对它的克服必须标本兼治. 我们从廓清思想的角度出发，就容易产生片面认识的若干方面，提出如下一些观点.

(1)数学探究教学虽然比传统的数学课堂教学有一定的优势，但它本身也有需要克服的一些困难，这些困难主要表现在如何处理教师和学生在教学过程中角色转变和调整的问题，以及为了适应这些转变和调整教师所面临的能力和态

度的挑战．为此，数学教师本人应加强理论学习，注重实践研究，主动学会探究，不断提高素质，要能根据数学探究教学的需要，创设适宜的教学情境，进行合理的引导，运用一切可能的手段,不断优化教学的设计,激发学生探究的兴趣，营造良好的风气，让每个学生都有主动探究的机会和欲望，让不同的人在数学探究中得到不同的发展．

（2）数学探究教学本身不仅体现了高水平数学学习的教学要求，而且体现了高层次数学教学思想的内化活用，应当创造数学探究应具备的条件,关注学生在探究过程中有效的思维，遵循在情境中学习的规律，合理选择数学探究教学的内容．为此，一是要认真考虑学生发展的差异性和不平衡性，深入分析不同学生的数学探究需求和能力水平，切实做到“因材施教”；二是要注意尽量避免选择繁杂、艰深的课题，做好基础性的数学探究活动，抓好学生基础性的数学探究学力，实事求是、循序渐进地落实数学探究教学的各项工作；三是要防止片面地理解数学探究内容应有的情景性、操作性、体验性和综合性，要充分关注数学探究活动中的数学意义，要加强数学思想方法的有效渗透；四是要以对探究需要的分析作为数学探究教学设计的逻辑起点，进行数学探究活动设计时要注意“‘元认知提示语’的启发暗示，防止‘滑过现象’的发生，尊重探究过程的‘自组织性’”[4]．

（3）在数学探究教学过程中，应自觉地防止过度帮助学生的行为，要“在教师的主导下，尊重学生在学习中的主体地位，给学生以自主学习的充分空间，包括学生可以遵照自己的学习要求，超越教师的指导和课本的限制”[5]．

（4）有效的数学探究教学方法应该提倡在教师主导下的有效讨论，在独立思考基础上的有效互动交流，要淡化数学探究教学的形式，注重数学探究教学的实质，正确处理好小组合作中“互动与制约、分工与分享”等关系，自觉拒绝形式主义的小组合作交流．“数学教学中除了少量的直观观察需要通过活动加以确认之外，多数是个人的独立思考．数学学习主要是思维活动，依靠个人的独立思考完成学习任务．彼此的交流是必要的，却不能大家一起做一道题，或者分工完成数学学习任务．那些分成小组、交头接耳，一两分钟就得到结果的合作是浅层次的，效果有限．如果说低年级学生需要通过分组竞赛的形式活跃课堂气氛，那么在中学阶段，合作的方式要慎用．至今我们还没有看到中学数学教学通过合作获得成效的科学报告．”[5]

（5）计算机的出现改变了数学家主要利用纸、笔和以逻辑推理、演绎证明等方法为主的研究形式，使观察、实验、猜想、模拟、矫正和调控、图形数值分析、度量与分类等方法策略日益发挥重要的作用．数学探究教学在一定程度上是数学研究“再创造”式的复演，也必须重视数学实验、应用实践等学习方式．为此，“多媒体”在数学探究教学中大有作为．但是，在数学探究教学中，“多媒体”又非常容易被误用，并于不知不觉中产生各种形式的异化现象，只有树立最优化运用“多媒体”的理念，提高最优化运用“多媒体”的素质，才能有效防止各种形式的误用．当下特别需要强调的是教师主导性的发挥：课前要认真备课，努力提高课件质量；课堂上要“远离”机器，要关注学生、关注思维、关注学生的数学理解，要防止各种形式的“机灌”现象；课后要认真进行教学反思，主动分析提高“多媒体”运用效果的策略．

（6）现代数学课堂教学评价强调把评价的焦点指向学生的数学学习和内在的协调发展，关注学生作为“整体的人”应有的数学素质，回归学生的数学现实世界，在“做数学”中寻求个人理解的数学知识建构．它不仅要关注学生数学学习的结果，还要重视学生数学学习的过程，并将数学课堂教学评价与教师的教、学生的学有机地结合起来．为此，数学探究教学评价应当正视由于高考“指挥棒”等因素直接与间接的影响，全面深入地理解课堂教学评价应有的功能．当下特别需要强调关注学生的年龄特征和认知特点，关注学生数学探究素质的发展，关注数学探究中环境认知和分配认知的功能，关注学生认知方式与情感体验的并重，关注数学探究情境的营造，关注数学探究中脚手架的搭建，关注对生活常识和数学常识的精微化、系统化处理，关注数学课堂中活动化、生活化与数学化之间的平衡[6]．

[参考文献]

[1] 潘小明．试论初中探究性数学教学的内涵及实施策略[J]．上海师范大学学报（基础教育版），2004，（12）：73–76．

[2] 潘小明．充分运用现代教学媒体探索最优化的数学教学模式[J]．数学通报，2006，（7）：12–16．

[3] 巩子坤．数学知识的特征与学习方式的有效选择[J]．中国教育学刊，2005，（11）：55．

[4] 宁连华．数学探究教学设计研究[J]．数学教育学报，2006，15（4）：39–41．

[5] 张奠宙，黄荣金．关于“自主、探究和合作”教学的再认识——兼谈《全日制九年义务教育数学课程标准》[J]．湖南教育，2006，（5）：4–6．

[6] 潘小明．对数学课堂教学评价的若干思考[J]．当代教育科学，2004，（21）：49–50．

Study on Alienation Phenomenon about Mathematics Inquiry Teaching

PAN Xiao-ming

(Taizhou Teachers College, Jiangsu Taizhou 225300, China)

Abstract: At present, there were several alienation phenomenon in the content, method and appraise of mathematics inquiry teaching, in order to clear the ideological understanding that can easily produce a one-sided knowledge about mathematics inquiry teaching, this paper looked for the phenomenon cause of deep layer in behind and put forward some views.

Key words: mathematics inquiry teaching; alienation phenomenon; analysis of causes; ideological understanding

[责任编校：陈汉君]

第17卷第2期　　数学教育学报　　Vol.17, No.2
2008年4月　　JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION　　Apr., 2008

数学教育研究需要实践
——钟善基教授访谈录

代　钦，王晓霞

（内蒙古师范大学 数学科学学院，内蒙古 呼和浩特　010022）

摘要：钟善基认为在数学教育研究中要重视实践；数学教师需要研究数学教育理论，由经验型向科研型转变；中外数学教育交流，对交流双方都有促进作用；“教学大纲是学校教育的宪法”的思想抑制了数学教育研究的自由性和开放性；编中学课本时既要注意保持逻辑系统，又要体现认识系统；讲正面的东西必须拿反面的东西配合才会有好的效果.

关键词：钟善基；中国数学教育；数学教育国际交流；数学教育的研究方法

中图分类号：G421　**文献标识码**：A　**文章编号**：1004-9894（2008）02-0025-03

1　前　言

2006年5月28日，我国著名数学教育家钟善基（1923—2006）先生离我们而去了，这是我国数学教育界的重大损失．这是我们聆听钟先生讲课一周年的日子，2006年5月28日，我们在首都机场从日本大阪教育大学铃木正彦教授打来的电话中得知钟先生突然辞世的噩耗后，万分悲痛，潸然泪下．因为1995年通过李迪先生、日本著名数学教育家横地清先生和铃木正彦教授结识钟先生以来，长期得到他老人家的热忱关怀和指导，并建立了深厚的友谊．当时，我把钟先生去世的消息立即打电话告诉了在呼和浩特的我的研究生们时，他们也都默默地哭了．他们兴许是最后听过钟先生关于数学教育研究发展的长时间报告的学生了！

2004年，我们作了访谈国内外著名数学教育家的计划，初步指定了一些访谈对象后，与他们取得了联系．给钟先生打电话谈到我们的想法时，他格外赞同，欣然同意访谈．他说：“提前一周打电话后直接来我家就可以了．”这样，我们就兴高采烈地访谈了钟先生．到目前为止，我们已经访谈的专家有：李迪先生（内蒙古师范大学）、横地清先生（日本著名数学教育家）、张奠宙先生（华东师范大学）、松宫哲夫先生（日本大阪教育大学数学教育史研究专家）等．

2005年5月28日早晨，我们一行7人专程前往北京师范大学访谈钟善基教授．我们按约定上午九点之前到了钟先生家，他非常热情地接待了我们．钟先生家里的陈设古朴素雅，书架上除有很多专业书籍外，还摆放着国内外友人赠送的书籍和艺术品．身为北师大教授、我国数学教育研究的老前辈，却如此简朴节约，使我们感慨万千．首先钟先生向我们问起李迪教授、罗见今教授、莫德教授和郭世荣教授的近况．然后又说到日本的横地清、铃木正彦两位先生、我国的马忠林先生等．钟先生虽然年过八旬，但身体状况非常好，一口地道的北京话说得幽默诙谐，声音洪亮清晰．当说到自己现在的研究情况时，他说：“我过了八十就不出门了，开始‘闭门思过’了．”他看着我们写好的访谈问题说：“那我就根据这个答记者问了．”访谈进行到中午十二点多，钟先生似乎忘掉了时间的流逝，我们只好提醒他老人家时间不早了，于是钟先生遗憾地结束了谈话，似乎要给我们讲的话还有很多！

通过对钟先生的访谈，我们对我国过去的数学教育和国际交流情况有了更深入的了解，而感触最深的就是钟先生也一再强调在数学教育研究中要重视实践．这与日本著名数学教育家横地清先生“写论文是用脚写而不是用手写”的主张不谋而合．两位数学教育研究专家都不约而同地告诫我们这些年轻人搞数学教育研究要结合实际，与中学老师交流合作．这对于我们将是受益无穷的．

我们回校整理访谈记录后给钟先生寄去了，钟先生不辞辛苦，很快仔细修改后给我们寄了回来．以下访谈内容是经过钟先生的同意后才公开的．

2　访 谈 录

问：您认为我国的数学教育研究受外国影响的程度如何？例如，我国建国初全面学习苏联时，中学数学教育研究的状况如何？

钟：从大的方面说，我国清末派往日本的留学生回来后对我国数学教育产生了巨大影响．清末办洋学堂，教学大纲、教师、教材都来自日本．后来逐渐学习美国，往美国派了很多留学生，故受美国影响也较大．日本也学习英国，如菊池大麓和藤泽利喜太郎两位先生．菊池大麓先生从英国留学回国后任日本教育部长．我国中小学先仿照日本的学制，后来又学习美国学制，“三三制”就是学习美国的．课本有的直接翻译日本的，有的先译后改编成课本，从小学到初中的，还不算少．20世纪二三十年代主要是翻译或编译美国的课本，最典型的要数高中的《范氏大代数》（*Fine: A College Algebra*），被很多知名中学采用；另外还有《霍奈二氏大代数》（*Hall-Knight: Higher Algebra*）——陈省身说他做中学生时，就得益于此书．中国故有的数学教学课本不是专门为学校编的．

收稿日期：2008-01-25

作者简介：代钦（1962—），男，内蒙古科尔沁右翼中旗人，教授，博士生导师，内蒙古师范大学数学教育研究所所长、学术期刊社副社长，主要从事数学教育、数学哲学、数学史研究．参加访谈的有内蒙古师范大学数学科学学院课程与教学论专业的硕士研究生王晓霞、白革命、李春兰、孔建霞、张慧萍、吉日木图等6位同学，王晓霞整理了访谈记录．

1952年，教育部全面计划命令“按苏联形式编写中小学大纲”，学制12年不变，苏联小学、中学共10年．因为苏联高中没有解析几何，我国把高中解析几何也减掉了，这是个明显的缺点．1952年正式使用新大纲，一直到1958年大跃进．

高中删减解析几何给学有余力的学生带来了损失，但我国学校能普及到初中是沾了苏联的光．那时教师中真正有水平的并不很多．

新大纲从要求上说，比原来的提高不小．例如，函数在原来课本中微乎其微，学苏联后有了很系统的函数内容．新课本讲圆的周长和面积的计算是通过圆内接多边形的边数逐渐增多求得的．这一思想很先进，在我国数学教科书中前所未有．

问：文革时期，我国数学教育遭到严重破坏，您能否介绍一下当时的数学教育和数学教育研究状况？

钟：文革前我国数学教育研究很不错，《数学通报》上的文章都很好，研究人员也越来越多，各中学、大学和地区学校成绩很突出．1979年以后的研究者们专门研究考试和习题，教研室变成了“考研室”，很不好．各出版社争相出版习题集，教育理论研究的书却得作者自己花钱出版．

说到文革破坏我想以北京为例．“四人帮”摧残中国的教育是人所共知的，但形式上不能不要学校．1966年到1971年北京取消高中，只设初中．1971年后不但市里恢复高中，而且呼吁下面的县里也普及高中，但是短期内全面恢复是不可能的．那时北京教师进修学院停办，所以就把北京市分为南北两部分，北边归北师大，南边归北师院（现在的首都师大），对教师进行短期培训．我负责“北半球”各县，受命普及高中．因为当时郊区各县能教高中的教师很少，当时郊区各县一个班内的学生有高一的、有高二的，总计又只十多个人，上课时只念课本上的文字而已．

北京教师进修学院曾被下放的老师又被叫回来编教材，组成教材编写组，后来发展为北京市基础教育研究中心．那时编教材讲究“穿靴戴帽”，每章开头要写“毛主席教导我们说：……”，结尾要写教导学生的格言．这样一来，书就会很厚．但他们编出来的书很好，初中代数课本每章只有两道题是自己编的，其余题都是从各工厂搜集到的．后来改编教材把这些题都删掉了．美国的代数学家杰考布森(Jacobson)夫妇来访，夫人是数学教育家．她看到70年代北京编的初中代数课本中的习题很好，怎么现在（80年代）的初中代数课本中这类习题没有了呢？那时北京市的教师很努力，成绩很大．

问：据横地清先生和李迪先生介绍，“文革”以后您和横地清先生、马忠林先生首先开始了中外数学教育交流．您能否介绍一下当时和以后这方面的一些情况，开展过哪些相关活动，对我国数学教育产生过哪些促进作用？

钟：我与横地清先生联系已有20多年了．1979年横地先生第一次来中国，用他自己当时的话说是“大胆地到中国来了”．横地先生与一些中学老师编写了一套关于逻辑、几何、代数、集合的小册子，当时我国正提倡集合论．横地先生给我国当时的教育部长寄来一份履历，教育部让北师大和东北师大负责接待．我看了横地先生的履历，与我非常类似，我很欣赏他这个人．

1980年横地先生再来的时候带来了冈森博和和町田彰一郎两位先生．北师大管外事的副校长顾明远和东北师大的马忠林、梁主任（即梁植文，时任吉林省教委主任，东北师大数学系老师）负责接待．横地先生他们说要每年见一次面，他们出钱请中国人到日本．当时我任北师大数学系中学数学教育研究室主任，负责有关北京方面的事项．东北由马忠林先生负责有关方面的事项，我们二人就应邀前往了．到1986年决定扩大范围，请美国、西德、法国的数学教育家参与会议，由两国发展到5国，我和横地清任联合主席(Co-chairman)．后来我们也有钱了，可以自己出资去日本了．从1994年开始每两年开一次5国会议．铃木正彦先生把会议主题扩大到数学文化史方面，使内容丰富起来．1994年我想去参加会议，北师大向教育部申请，批示说“不同意”，考虑到我年纪太大不安全，后来是我们系主任给保证才得以去成．1996年还是不同意我去，经过校医部体检合格后才去成．1998年我自己估计肯定不能去了，就没去．

中日数学交流会每年见面一次，参加人都是搞研究或搞数学教育的．我只没去过法国．

彼此交流当然受益很大．如德国的Graf(柏林自由大学)对中国有相当的认识，可惜他汉语不好．他还研究八卦．有一次他与我聊孔子和老子，竟然聊了两个小时，很不简单．

日本有个规定，中小学教师只能在寒暑假期间出国参加会议．

说到促进作用，对交流双方都有促进．首先联系实际方面，横地清先生很重视实际，当然理论也强调．他倡导用“影子几何”通俗地教给学生，但由于种种原因，没实行．

问：您一定参加过很多数学教育方面的国际交流会议，您认为这些会议所倡导的思想能够被我国的数学教育研究者们吸收，并在我国推广吗？

钟：美国伊利诺伊大学戴维斯(R. B. Davis)教授是SMSG(School Mathematics Study Group，中学数学教育研究会)创始人之一．他于1990年来北京参加5国会议，我问他：“美国现在推行的发现法，如何做好呢？”他说：“那不是那么简单的事，涉及到心理问题．”“发现法该用，但不好用，不能随便用．”到底怎么用他没说，他于1992年去世了．

1983年，我去东京参加“国际数学教育东京会议”，以中国数学教育学会代表团的名义去的，大约200人参加．我带回来的中学数学课本的编法很好，我们的数学课本的编法也应该改变．如原来按逻辑系统编的《欧氏几何原本》加些习题就是数学课本．反过来有的含习题的课本，如果去掉习题，只剩下逻辑系统的论述，课本也就是专著了．以后编中学课本，既要注意保持逻辑系统、又要体现认识系统，使之成为两者相结合的数学系统的数学课本．日本东京大学的数学家、数学教育家藤田宏也是这种论调．

问：您培养了很多研究生（包括外国的研究生），现在您的研究生在自己的岗位上都有出色的表现，您能说说他们现在的情况吗？

钟：我教过的研究生有7个在美国，其中3个非常出色．蒋忠宏现在在佛罗里达国际大学搞计算机教育研究．他高中毕业时没考上大学，英语很好，扬州英语竞赛获第一名．后来到北师大学习，表现非常出色．有一次他为美籍华人怀特曼（Nancy Whitman）教授做翻译，这位女教授建议他去美国留学．后来她又介绍蒋忠宏到美国大陆佐治亚大学跟随杰姆斯•威尔逊（James Wilson）学习，取得数学教育和计算机双博士学位，毕业后威尔逊又介绍他到佛罗里达国际大学任教．

另一位是蔡金法，1989年去美国匹兹堡大学跟随E. 西利威尔（Edward Silver）教授学习7年，取得博士学位后到德勒威尔大学任教，2004年已被聘为该校的终身教授了．

还有李业平，1991年去美国夏威夷大学，后来去了匹兹堡大学．取得博士学位后到汉普塞尔大学任教至今．此外现任人民教育出版社中学数学室主任的章建跃也是我的学生．

问：您认为我国数学教育研究中存在哪些问题？问题的根源是什么？如何克服或超越它？

钟：我个人认为，研究是研究，不一定要按国家规定走．例如，以前有一个本科生，他认为1977年大纲中不应有矩阵内容，要写一篇文章反对这个，问我行不行．我说："行，你说的有道理就行．"最后写出来是很不错的．

研究历史是看过去，研究现在，更为将来的发展．

苏联当时奉行"教学大纲是学校教育的宪法"，我们学习它就不能做到因材施教，超越它又怕麻烦．这种影响到现在还有，抑制了现在研究的自由性和开放性．

问：您能否给我们这些年轻人如何学习和研究数学教育提出一些建议？

钟：理论研究方面我同意20世纪80年代初由西方国家传来的观点，即研究数学教育的理论，应包括数学教育的3论，即"数学教育课程论"（Theory of Curriculum）、"数学教育学习论"（Theory of Learning）、"数学教育教学论"（Theory of Teaching），3者是相互关联的．

倡导数学教师由经验型向科研型转变．教师中的一些有心人下课后琢磨课上哪一环节不理想，下次怎么做更好，就是在搞科研．如果一直这样就很好．

与日本交流的过程中我体会到：

（1）日本的小学数学内容可叫做常识性的数学知识，主张"宽"而不主张"专"．菊池大麓先生编的初中几何的内容中逻辑性要求就很强，小学数学中的几何内容仅要求实验几何．

（2）讲正面的东西必须拿反面的东西配合才会有好的效果．但是小学数学中的交换律就找不到不能交换的例子，直到群论才有反例．几乎每次修订大纲都会对此进行讨论，大家众说不一，要按日本当年的主张就不应该有．

Research of Mathematical Education Needs Practice——Interview Professor Zhong Shan-ji

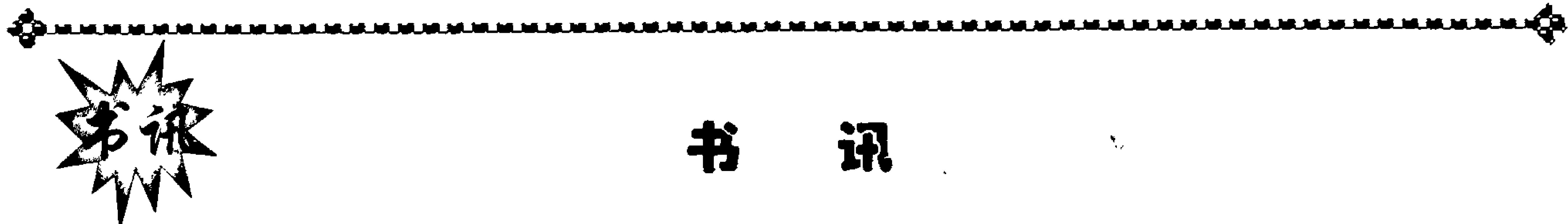
DAI Qin, WANG Xiao-xia

(Mathematics Science College of Inner Mongolia Normal University, Inner Mongolia Huhhot 010022, China)

Abstract: Professor Zhong Shan-ji is a famous mathematics educator in China. The paper showed some thoughts of Zhong shan-ji from interviewing, which included characteristic of mathematical education development, important meaning of mathematical education research of international communication, direction of research of mathematical education and some expectations to young researchers of mathematical education.

Key words: Zhong Shan-ji; Chinese mathematical education; mathematical education research of international communication; direction of research of mathematical education

[责任编校：陈汉君]



书　讯

大连理工大学出版社出版、整理了著名数学家、数学教育家徐利治先生六本著作：《微积分大意》、《数学分析的方法及例题选讲》、《数学方法论十二讲》、《徐利治谈数学哲学》、《徐利治谈数学方法论》和《徐利治谈治学方法和数学教育》．另外，该出版社还将出版徐利治先生主编的《数学科学文化理念传播丛书》．

联系人：梁锋

电话：（0411）84708947；84707019

E-mail:liangf66@163.com

第 17 卷第 2 期　　数学教育学报　　Vol.17, No.2
2008 年 4 月　　JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION　　Apr., 2008

面向数学教育改革的职前小学数学教师培养的试验研究
——小学数学教学论课程中问题提出的实施为例

陈丽敏[1,2]，陈　琦[3]，李林波[1]，Verschaffel. Lieven[2]，杨宝忠[1]

（1．天津师范大学 初等教育学院，天津　300387；
2．比利时鲁汶大学 心理与教育科学学院，比利时；3．北京师范大学 心理学院，北京　100875）

摘要：课程改革的目标是教师能把新课标理念准确地渗透到数学教学中，这同时也是职前教师培训的目标．小学数学教学论的教学应该将小学数学教学所涉及的基本原理展现给职前教师．小组合作学习方式和多元评价方式应贯穿于小学数学教学中．

关键词：数学教师教育；问题提出；小学数学
中图分类号：G424　文献标识码：A　文章编号：1004-9894（2008）02-0028-03

1　前　　言

2001 年我国颁布了新数学课程标准，标准强调：教师应该引导学生在自主探索，合作交流的数学学习活动中获得数学基本知识和技能，数学思想方法和活动经验；应该建立评价目标多元，评价方法多样的评价体系[1]．特别地，在问题解决标准中强调：学生要初步地从数学的角度提出问题、理解问题，并能运用所学的知识和技能解决问题，发展应用意识；形成解决问题的一些基本策略，体验解决问题策略的多样性，发展实践能力和创新精神；学会与人合作，并能与他人交流思维的过程与结果；初步形成评价与反思的意识．自从标准颁布开始，数学课程改革就拉开了帷幕．数学课程改革能否成功实施的一个关键环节是教师是否能够把新课程的基本理念准确地渗透到数学教学中，为了实现这个目标，职前数学教师培养的研究更加具有重要的意义．不仅全国性的数学课程改革为本研究提供了良好的契机，同时我们学院也为本研究提供了理论和实践方面的支持．从 2002 年开始，天津师范大学初等教育学院就开始了本科层次小学教师培养的理论探索与实验研究．在理论探索方面，对本科层次小学教师的培养目标与培养方案的内容进行了修正和完善；在实践教学方面，既重视小学教师理论知识的培养，也重视教学技能的提高．由于作者担任天津师范大学初等教育学院小学数学教学论课程的教学工作，所以小学数学教师培养的试验研究应运而生了．这项试验研究是以小学数学教学论这门课程为载体，其主要的目标是培养具有小学数学教学的基本理论和基本技能的小学数学教师．

2　试验研究的内容

2.1　试验的目的

本试验研究目的是培养具有小学数学教学的基本理论和基本技能，能够成功完成数学课程改革的小学数学教师．其中，培养小学数学教师具有在小学数学教学中实施问题提出教学的能力是本研究的一个重点．

2.2　试验的实施

试验从 2007 年 3 月开始，整个试验持续一个学期，选取的样本是天津师范大学初等教育学院 2004 级数学班的 45 名本科生．在试验的开始这些学生已经完成了一些小学数学教育专业的数学类基础课程和教育类基础课程．例如，数学分析、高等代数、教育原理、学与教的心理学等．

2.2.1　教学理论与观念的培养

小学数学职前教师的理论知识主要分为 3 个方面：教育学的基本知识、高等数学的基本知识、小学数学教学的基本知识．在初等教育学院的教学计划中，教育学的基本知识通常是通过院里公共必修课的方式来实施的．例如，教育原理、小学教育心理学等．高等数学的基本知识是通过数学系的必修课方式来实施的．例如，高等代数、数学分析等．这两个领域的知识侧重于从理论上给予职前教师教育学和数学知识的培养，小学数学教学论是侧重于从实践上给予职前教师数学教学知识与技能的培养．因此，小学数学教学论的教学应该将小学数学教学涉及的基本原理展现给学生．基于上述的认识，本课程内容的设置从新数学课程标准基本理念入手，突出地讲解小学生数学能力培养目标所涉及的几个不同的专题．例如，问题提出教学专题、开放题教学专题、数学思想方法专题等，同时以 4 个基本的内容领域为依托，将小学数学课程涉及到的基本数学原理讲解给学生．例如，小学数学竖式教学中蕴涵位置制的基本思想、圆的周长和面积的教学内容中的微积分的基本思想、图形变换中的变换群的基本思想．如果教师不懂得这些基本思想，那么在教学的过程中就不可能让学生深刻地理解这些知识．

在上述对小学数学教学论内容设置剖析的基础上，本课程首先介绍了新课程标准的基本理念．例如，对数学课程的认识、数学的认识、数学学习的认识、数学教学的认识、数学教育评价的认识、现代信息技术在数学课程中的认识；若

收稿日期：2007-12-17
基金项目：天津市教育科学“十一五”规划课题——问题提出能力发展的实验研究（ZZG217）；天津师范大学哲学社会科学研究青年基金——问题提出和问题解决关系的调查研究（52LJ51）
作者简介：陈丽敏（1976—），女，天津人，比利时鲁汶大学心理与教育科学学院博士生，主要从事数学教育研究．

干核心的概念．例如，数感、符号感、空间观念、统计观念、应用意识和推理能力；在此基础上，以专题的形式把小学数学领域中涉及的数学内容讲解给学生．例如，课程改革的 4 个内容领域：数与代数、空间与图形、概率与统计、实践与综合应用．同时增加一些和新课改紧密相关的内容．例如，开放题、问题提出、问题解决、美国数学课程标准、现实性数学教育理论、数学史融入数学教学等专题．

2.2.2　教学技能的培养

职前数学教师教学技能的培养主要是学生在小学数学教学理论指导下的教学实践活动．对于教学技能的培养，我们学院具体的措施是：学生从大一入学开始每个学期有一周的见习时间，到大三的上半学期结束，大三的下半个学期有一周的模拟课堂，大四的上半个学期开始为期 8 周的实习．同时，学院也组织学生到小学听一些观摩课．除此之外，主要通过小学数学教学论课程的培养．在这门课程的实施中，学生教学技能的培养安排在学生获得了数学课程改革的一些基本理念和观看了一些教学录像之后．整个教学技能培养和理论的教学是交错进行的，就每个专题来说是在理论教学之后进行．只有经历的事情才会有更深刻的体验，因此，为了让准教师在今后的教学中能够在深刻理解的基础上实施小组合作学习、多元评价等与新课改相关的教学技能，在小学数学教学论授课的过程中，我们引进了小组合作的学习方式．学生在教师指定和自愿组合的基础上分成几个小组，每个小组根据课上老师讲的内容设计一节课．例如，老师讲完了开放题，就给每个小组布置一个作业，题目为"关于开放题的一节教学设计"，可以在数与代数、空间与图形、概率与统计、实践与综合运用 4 个领域中任选一个知识领域进行试讲．试讲的学生是一个小组的代表，从报告的撰写到试讲的整个过程都是每个小组成员合作的结果．学生在试讲完之后，其它组的学生给试讲小组的学生评课，最后教师给出最终的评价．每隔一个月左右，学生在微格教室试讲，通过录像的回放，学生现场评价，分析教学的不足．在小组合作进行教学设计的过程中，学生有什么问题可以通过网络平台和教师联系，同时教师也介绍给学生一些收集教育资源的方法．例如，数学教育学报、网络上的一些资料等等，这样做能够培养学生自学的能力，同时也为他们提供了毕业后继续学习的途径．

我们可以看出，整个实施过程突出了以学生为主体的教学观，通过学生的互相合作、自主探索，不断地在教学设计的过程中理解、吸收、反思教师课堂中讲的教学内容．教师并不是以讲授知识为主导，在教学的过程中，贯穿着学生的试讲，教师给予及时的评价．因此，教师是课程实施过程中教学活动的组织者、指导者和合作者．

2.3　实施的评价

由于我们学院 2004 级只有一个班，所以没有选择对比班，同时由于实践方面的原因，也没有进行理论方面的前后测，但是整个试验的实施也采用了切实可行的、比较适合的评价方法，即定性与定量相互结合的多元价值取向的评价体系，既关注学生的学习结果，也关注学生在学习活动中表现的积极参与态度；既关注学生的理论知识水平，也关注学生的教学技能水平．学生的最后的评价由 3 部分组成：小组合作试讲的成绩（占 20%）、个人试讲的成绩（占 20%）和期末理论成绩（占 60%）．

3　问题提出专题的实施举例

我们以问题提出专题为例，将试验研究实施的整个过程进行详细地描述．

3.1　问题提出理论的培养

在问题提出的理论部分，本专题主要涉及以下几个内容：首先是问题提出理论产生的背景以及当前新课标对问题提出的相关阐述；其次是问题提出的概念和意义、问题提出的分类；接下来是问题提出和 5 个教学环节的结合，最后是结合某一个具体的知识点，举例说明如何将问题提出融合到小学数学教学中．

3.1.1　问题提出教学的理论背景

在这个部分，我们介绍了当前一些著名的数学教育家对于问题提出的认识．例如，学者 Brown 和 Walter 等人一致认为问题提出是数学课程的重要的组成部分，甚至是数学教学活动的中心等[2]．接着，介绍了国内外数学课程标准对于问题提出的相关阐述，我国课程标准强调学生要初步地从数学的角度提出问题、理解问题，并能运用所学的知识和技能解决问题，发展应用意识．美国数学课程标准强调学生应该有"发现和提出他们自己问题的能力，问题提出是数学学习的核心"．之后，介绍了当前一些学者对问题提出给出的一些概念．例如，问题提出是学生在不知道问题答案的情况下提出数学问题的过程[3]；问题提出是学生在数学经验的基础上对具体数学情境的个体建构，并把这种数学建构作为数学问题提出的过程[4]；同时，1994 年学者 Silver 也指出，问题提出指新问题的提出和已有问题的重新阐释，它可以发生于问题解决之前，问题解决之中和问题解决之后[5]．在 Silver 的问题提出概念的基础上，问题提出分成 3 类：问题解决之前的问题提出、问题解决之中的问题提出和问题解决之后的问题提出．接下来，本专题阐述了问题提出教学对于学生创新能力、问题解决能力、数学理解能力以及数学情感发展的重要作用[6]．

3.1.2　问题提出的分类

在这个部分，本专题介绍 3 种问题提出的定义：问题解决之前的问题提出，问题解决之中的问题提出，问题解决之后的问题提出．

问题解决之前的问题提出是指从一个现实生活或虚拟的情境中提出数学问题的过程．根据下面的数学情境提出数学问题的过程都是问题解决之前的问题提出：（1）根据一些数学表达式提出数学问题．76+28，96-24，11×3，24÷3，7.6+28，9.6-24，11×0.3，2.4÷3；（2）根据下面的数学故事提出数学问题．一个晴朗多风的周末，小明在儿童公园玩，他注意到一大群人在放风筝，他数一数一共 33 个风筝，突然间风停了，17 个风筝落到了地上，还剩 16 个风筝在天空中；（3）将下面这个数学问题补充完整．小明有 4 根绳子，每根长 2.5 米，________________？（4）将下面这个数学问题补充完整，使问题的答案是 385 支笔．小明有 180 支笔，

小华有65支笔，小丽比小明多25支，________________?

问题解决之中的问题提出是指学习者有目的性地改变目标问题或问题的条件，以便更利于问题解决的顺利进行．例如，引进一些辅助性的、更容易着手的问题（普遍的、特殊的、或类比的问题）．使用波利亚的4步解题方法在解题的过程中，学生可以被引导写出解题过程中所有出现在脑海中的问题．通过这种方法，学生可以将自己的思维过程呈现出来，以便教师和他们自己对解题的过程进行评价，以便增强解题的能力．

问题解决之后的问题提出是指学生们已经解决了某一个问题之后，重新检查问题的条件，进而产生一些相关的问题[7]．假设否定的方法是问题解决之后的问题提出经常会用到的一种普遍性的方法[2]．这种方法包含4个步骤：因素的列举、假设否定、提出问题和分析问题．

3.1.3 问题提出与教学环节的结合

介绍了3类问题提出的方法和类型之后，本专题介绍了如何将3类问题提出和导入、新课讲授、练习巩固、总结等教学环节结合起来．导入教学环节可以应用问题解决之前的问题提出，也可以应用问题解决之后的问题提出．如果新知识和旧知识之间的联系不是很紧密，不需要旧知识来引入新知识，那么可以应用问题解决之前的问题提出．例如，在乘法的初步认识的教学中，教师给出学生游乐园的图片或者录像，图片中有过山车、摩天轮等游戏项目，让学生根据图片提出数学问题．学生可能会提出过山车上一共有多少人，摩天轮上一共有多少人等问题．因为这些游戏项目上面每个座位上的人数都是相等的，所以根据学生的问题就引出了一些相同加数的和的式子，最后让学生观察各个式子，总结特点，得出乘法的概念．如果新旧知识之间的联系很紧密，我们可以先提出一个应用原有知识能够解决的问题，问题解决之后再提出一些和新知识相关的问题．例如，小数的乘法教学中，教师可以先复习整数乘法的计算，让学生根据问题情境“一个箱子的高度是15厘米，9个箱子落在一起多高？”得出9个箱子的高度是135厘米之后，将问题中的15厘米改写成1.5分米，让学生求9个箱子的高度是多少分米，这样就引出小数的乘法．现代教学理论认为，新课讲授的环节就是问题解决的过程，那么问题解决之中的问题提出通常应用在新课讲授的教学环节中．例如，平行四边形面积的教学中，我们给学生展现了一个平行四边形，明确它的高和底之后，提出平行四边形的面积如何来求的问题，之后，引导学生思考已知哪些图形的面积公式，是否能够应用已知的矩形或者正方形的面积公式来求平行四边形的面积，那么关键的问题就是如何将平行四边形转化成矩形，最后利用剪拼的方法将平行四边形转化成矩形．练习巩固环节可以继续根据导入环节创设的问题情境提出一些新问题．例如，上文提及的游乐园情境中，可以再引导学生提出5个小飞船上一共有多少个小朋友？当然也可以重新创设情境引导学生提出问题．总结环节通常是应用问题解决之后的问题提出引导学生根据课上所学的知识提出一些相关的问题，在课下解决．例如，在矩形的面积教学中，引导学生根据问题情境“求长为3厘米，宽为6厘米的矩形的面积”提出相关的问题．

3.1.4 教学举例

最后，本专题以“四则运算”的教学设计为例，描述如何将问题提出的教学融入到数学教学之中．

3.2 问题提出教学技能的培养

问题提出教学技能的培养主要通过学生的小组合作学习来实现．让每组学生根据教材写一篇关于问题提出的教学融入到小学数学中的教学设计，然后派一个代表进行试讲，教师和学生进行评价，共同给出成绩．教学评价的时候除了一些基本的评价标准之外，例如，语言是否准确生动、重点是否突出、难点是否突破等；也要考虑该教学在哪些教学环节涉及了问题提出、是哪种类型的问题提出、问题提出和教学环节的结合是不是恰到好处等方面．

3.3 问题提出教学结果的评价

通过对职前教师试讲和教学设计的评价，研究者发现他们大部分都能够有效地将问题提出应用到小学数学教学中．

综上，我们详细地描述了在小学数学教学论课程中如何实施问题提出的教学．其它专题的教学过程比较类似，从学生的试讲、教学设计和试卷来看，学生在小学数学教学理论和教学技能等方面都有了很大的提高．

[参 考 文 献]

[1] 数学课程标准研制组．数学课程标准解读[M]．北京：北京师范大学出版社，2002.

[2] Brown S I, Walter M I. The art of problem posing [M]. Philadelphia : Franklin institute press, 1983.

[3] Leung S S. On the Role of Creative Thinking in Problem Posing [J]. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik International Reviews on Mathematical Education, 1997, 29：81–85.

[4] Stoyanova E, Ellerton N F. A framework for research into students' problem posing in school mathematics [J]. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1996, 21：541–544.

[5] Silver E A. On mathematical problem posing [J]. For the Learning of Mathematics, 1994, 14：19–28.

[6] Chen L, Van Dooren W, Chen Q, et al. The relationship between posing and solving division with remainder problems among Chinese elementary school children [J]. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 2005, 4(2)：85–109.

[7] 陈丽敏，Lieven Verschaffel, 陈琦．论问题提出与学生能力发展的关系[J]．数学教育学报，2006，15（3）：31–34.

（下转第89页）

而忽视策略性知识的教学．函数单调性的定义经历了由图像直观感知到自然语言描述，再到数学符号语言描述的进化过程，在本节课的学习中，学生最重要的收获也许就是体验和感悟蕴含在函数单调性概念的符号化建构过程中的策略性知识．

（3）张奠宙教授提出：“教师的责任在于把写在教科书上的冰冷的学术形态，恢复为学生易于接受的火热思考的教育形态．”[2]波利亚则说：“在教一个科学的分支（或一个理论、一个概念）时，我们应该让孩子重蹈人类思想发展中的那种最关键的步子，当然我们不应该让他们重蹈过去的无数个错误，而仅仅是重蹈关键性步子．”这两句话揭示出数学有三种形态：学术形态、教育形态、自然形态．教学设计就是要在数学的自然形态和数学的学术形态两极的中间构建起既反映数学本质又适宜学生学习的数学的教育形态．

[参 考 文 献]

[1] 张春莉，王小明．数学学习与教学设计[M]．上海：上海教育出版社，2004．
[2] 张奠宙，王振辉．关于数学的学术形态和教育形态——谈“火热的思考”与“冰冷的美丽”[J]．数学教育学报，2002，11（2）：1-3．

From “Learning by the Design of Teaching” to “Teaching by the Design of Learning”——a Review and Improvement of Teaching Design and Planning for “Monotonicity of Function”

LUO Qiang
(No.5 Middle School, Jiangsu Suzhou 215008, China)

Abstract: A good many contradictions of math education assembles at the first lesson of “monotonicity of function”, which constitutes challenged to the teaching design and planning and teaching process for every math teacher. Teaching design and planning based on the concept of “learning by the design of teaching” paid more attentions to the teaching of teachers than to learning of learners, emphasize on the transferring process of knowledge and the student’s obedience to the power of teachers, thus neglect the independent reflection and purport conformation. However, teaching design and planning based on the concept of “teaching by the design of learning”, with an attentive view to the learning process of students, emphasized on the evolution process of “monotonicity of function” from intuitive graphic character to natural language description and then to math denotation depiction, and also emphasized on the genetic evolution process of math knowledge, help to master the cognitive strategy by experiencing the symbolic construction of “monotonicity of function”.

Key words: monotonicity of function; learning by the design of teaching; teaching by the design of learning

[责任编校：陈汉君]

（上接第30页）

Tryout Study on the Development of Pre-service Primary Mathematics Teachers Based on the Mathematical Reform by an Example of the Implementation of Problem Posing in the Course of Instructional Skills on Primary Mathematics

CHEN Li-min[1,2], CHEN Qi[3], LI Lin-bo[1], Verschaffel Lieven[2], YANG Bao-zhong[1]
(1. Elementary Education College, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China;
2. Center for Instructional Psychology and Technology, University of Leuven, Belgium;
3. School of Psychology, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: The object of curriculum reform is teachers can penetrate new ideas in their teaching successfully. It is also the object to training of pre-service teachers. The teaching on primary mathematics should be presented the theory involved. The study mode of group cooperation and multi-evaluated mode should be penetrated into the teaching on primary mathematics.

Key words: mathematics teacher education, problem posing, primary mathematics teaching

[责任编校：陈隽]

第17卷第2期 数学教育学报 Vol.17, No.2
2008年4月 JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION Apr., 2008

初中生数学认识信念的SEM研究

周 莹[1]，唐剑岚[1,2]，黄国稳[1]

（1. 广西师范大学 数学科学学院，广西 桂林 541004；2. 南京师范大学 课程与教学研究所，江苏 南京 210097）

摘要：学生的数学认识信念是指学生对数学知识和知识认识过程的素朴看法或观点，属于个体认识论研究范畴. 初中生数学认识信念的结构由5个因素构成：知识结构性、知识稳定性、学习能力、学习速度和学习方式；一阶5因素在竞争模型中拟合数据更佳. 对一阶5因素模型，男、女生数学认识信念的潜在因素结构模型和测量模型相同，进一步确认了初中生数学认识信念的一阶5因素模型的稳定性与预测性.

关键词：数学认识信念；模型比较；多组验证性因素；结构方程模型

中图分类号：G632.0 **文献标识码**：A **文章编号**：1004-9894（2008）02-0031-05

学生的数学认识信念（Epistemic Beliefs about Mathematics）是指学生对数学知识和知识认识过程的素朴看法或观点，属于个体认识论研究范畴[1]. 国外大量研究表明[2-5]，学生认识信念深藏在他们的行为表现、认知过程、情感体验的背后，像一只无形的手，指引着学习过程，深刻影响着学习结果. 在我国，关于学生的数学认识信念的研究非常缺失，许多诸如“我国学生的数学认识信念的结构与成分是怎样的？”“我国学生的数学认识信念是如何形成与发展的，又是如何影响数学学习的？”等问题亟待探讨. 因此，本研究基于结构方程模型（Structural Equation Model，简称SEM）对我国初中生数学认识信念的成分与结构进行探讨.

1 学生数学认识信念研究概述

对学生认识信念的研究可以溯源到20世纪50年代Piaget的“发生认识论”研究. 譬如知识起源于个体适应自身所处的环境. 60年代末，Perry对哈佛大学等大学新生的认识信念作了4年的跟踪研究. 他的开创性研究工作，从此启迪了最近三十多年来的教育心理学界的许多研究. 其中Schommer等提出认识论信念系统的理论具有原创性与很强的现实意义. 研究之初，Schommer[6]编制了一个包括63个题项的认识论信念问卷，题项陈述采用李克特方式，开创了认识论信念的量化研究. 随后，一大批研究者基于Schommer的工作，做了大量的实证工作，如Jehng[7]经过验证性因素分析证实了Schommer4个因素，并用“学习过程”的这个新因素取代“知识的结构性”因素；Schraw[7]认为认识的信念系统由知识的稳定性因素、知识的结构性因素、学习的速度因素、学习的能力因素组成；Buehl[8]认为个体的学科认识信念系统是由个体关于学科学习的努力需要因素、学科的综合知识因素与学科问题解决因素构成.

在数学教育领域中，研究者主要运用数学信念（Mathematics Belief）的名称以涵盖数学认识信念. 典型代表是Schoenfeld的研究. Schoenfeld[9]认为学生的数学认识信念是指学生对数学以及数学任务采用何种方法解决的总的看法或认识. Muis[3]综述了教育心理学界和数学教育领域关于数学认识信念的研究指出，学生的认识信念是一个从无效到有效的连续体. 当谈及学生数学认识信念时，应该指影响学生数学学习过程和结果的数学认识信念系统，其成分主要包括数学知识来源的信念、数学知识稳定性的信念、数学知识结构性的信念、数学知识判断的信念、数学学习能力的信念以及数学学习速度的信念等.

无论是一般领域的认识信念成分与结构的研究，还是数学教育领域的数学认识信念的研究，都是基于他们本国文化的研究. 这些研究尽管对我国开展这方面研究有着参考的价值，但深入研究下去，必须进行适合我国文化“土壤”的本土化研究.

2 研究方法

2.1 样本选取

研究先后调查了3个样本. 样本1是开放式问卷调查样本，调查了广西桂林和南宁两城市的两所中学初中学生201名，共回收有效问卷168份. 样本2为预测样本，调查了广西桂林、南宁、百色等城市的5所中学（普通中学3所，重点中学2所）共439人，有效问卷共407份，其中初一122人（男63，女59）、初二142人（男68，女74）、初三143人（男68，女75）. 样本3来自广西桂林、南宁、柳州、百色，江苏南京等城市9所中学（普通中学5所，重点中学4所）共1 246人，有效问卷共1 204份. 对样本3随机抽取，分成样本3-1和样本3-2，样本3-1共591份，其中初一199人（男108，女91），初二189人（男100，女89），初三203人（男107，女96），用于预测与修订原始问卷；样本3-2共613份，其中初一211人（男102，女109），初二203人（男107，女96），初三199人（男101，女98），用于验

收稿日期：2007-12-25

基金项目：广西教育科学“十五”规划项目——网络环境下的高师“数学教育学”课程教学方法改革（2005C058）；新世纪广西高等教育教学改革工程“十一五”项目——基础教育新课改与高师数学教育系列课程的整合研究（[2006]194号）

作者简介：周莹（1962—），女，浙江嵊州人，教授，硕士生导师，主要从事数学课程与教学论研究.

证性因素分析.

2.2 研究工具

2.2.1 问卷工具

首先，获得学生数学认识信念的原始信息. 我们通过对学生、中学数学教师的访谈，得到学生数学认识信念的初步信息，并设计一份开放性问卷1，随机选择学习成绩好中差各10名学生，要求他们认真完成该问卷. 通过对开放性问卷1的分析，获得学生数学认识信念的原始信息. 其次，参考国外学者 Schommer[6]、Buehl[8]的问卷，结合原始信息初步形成了数学认识信念的开放性问卷2. 然后施测开放性问卷2，对有效样本的描述词与表现进行编码、汇总与归类，编制初始65个题项，再次参考国外学者的问卷，并请数学教育专家、中学数学教师对归类结果评估，并结合对个别学生的访谈，得到原始问卷. 该问卷有38个题项，答案以5点量表记分，从强烈地反对（1）到强烈地同意（5）.

2.2.2 统计工具

所用统计工具为 SPSS11.5 和 AMOS6.0.

2.3 研究程序

第一步，施测原始问卷，对有效样本2（n=407）数据进行题项分析、因素分析后，对剩下题项随机排列得到共32个题项的问卷1. 第二步，修订问卷1为问卷2. 问卷1完全基于数据分析的驱动而得. 统计结果不应该是修改的唯一依据，因此，我们请专家对问卷1的题项所表示的含义进行鉴别与分析，发现有些题项并不能反映其所在因素的含义. 基于数据分析与专家的观点，一方面删除问卷1中不能反映其所在因素的某些题项；另一方面对原始问卷再次进行了审定，从中选择出问卷1所没有包含的，但我们认为可能反映了某一因素的一些题项. 这样形成问卷2，共30个题项. 第三步，施测问卷2，得到有效样本3（n=1 204）. 用样本3-1（n=591）的数据，检验问卷2的理论假设与数据之间的拟合程度，以修改模型，形成问卷3，共22个题项；用样本3-2（n=613）的数据对问卷3进行从基本拟合标准、整体模型拟合度以及模型内在结构拟合度等角度来探讨数据与模型的拟合度验证性分析，并进行不同群体数学认识信念的因素结构不变性检验.

3 研究结果与分析

3.1 问卷2的模型评价及修正

问卷2的模型（初始模型）是通过对原始问卷不断调整模型与特定样本数据探索性因素分析以及理论上分析的产物，至于这一模型能否普遍适用于其他样本，我们以正式调查有效样本3-1（n=591）的数据，运用AMOS6.0软件对数据进行处理. 一般而言，模型的整体拟合优度主要从绝对拟合指标、增值拟合指标、简约拟合指标[10-14]3个方面进行评价，所得拟合指数如表1所示. 由表1知，不论是绝对拟合指数、增值拟合指数还是简约拟合指数，都显示了初始模型无法接受，这个结果说明了初始模型有必要进行修正. 从潜在变量对观测变量的参数估计输出结果发现，t5、t6、t27、t9、t20、t30、t29、t19、t21 等观测变量在各自的潜在变量表现非常差. 进一步查看输出结果，发现“e20<-->学习速度”的修正指数为216.006，显示第20题的测量误差与学习速度存在密切关系. 对此，进一步查看第20题“学习数学是一个逐步积累的过程，不可能一下子就能学好”，从语义上看，这主要说明学习速度方面. 基于此，我们进行模型的修正，决定将t20从属于学习速度因素，剔除t5、t6、t27、t9、t30、t29、t19、t21等观测变量，形成问卷3，共22个题项. 此时，我们将问卷3的模型称为模型1. 经模型修正后，整体拟合优度指标已经达到可以接受的程度，其结果见表1，从表1中知，各拟合指数已比较理想. 就绝对拟合指数来说，GFI大于接受值0.9，RMSEA在0.05以下，理论模型的ECVI值比饱和模型与独立模型的ECVI值都小；就增值拟合指数来说，AGFI、TLI、IFI、CFI均大于接受值0.9；就简约拟合指数来说，χ^2/df 介于1.00~3.00之间，PNFI和PGFI均大于0.5，虽然 χ^2 值达到显著性水平，使得模型拟合不佳，但是因为卡方值受到样本量影响很大，当样本较大时，往往使得真实模型的接受程度降低[10-14]. 进一步查看输出结果，22个观测变量在其所反映潜在变量上的因素负荷量，介于0.70~0.87之间，而且所有参数估计的 t 值大于2.58，达到0.01显著水平. 综上所述，模型1的整体拟合优度指标表现相当优秀，显示了模式具有相当程度的结构效度，观测变量具有足够用于反映潜在变量的效度.

表1 整体拟合优度指标

	绝对拟合指数					
	χ^2(df)（显著性）	GFI	RMR	RMSEA	ECVI		
初始模型	1 568.593(395)(0.00)	0.846	0.098	0.071	2.896	1.576	12.959
模型1(3-1)	370.676(199)(0.00)	0.946	0.038	0.038	0.811	0.858	11.244
模型1(3-2)	373.082(199)(0.00)	0.946	0.037	0.038	0.786	0.827	12.000

	增值拟合指数				简约拟合指数		
	AGFI	TLI	IFI	CFI	χ^2/df	PNFI	PGFI
初始模型	0.819	0.837	0.819	0.836	3.970	0.720	0.719
模型1(3-1)	0.931	0.969	0.973	0.973	1.863	0.813	0.744
模型1(3-2)	0.932	0.971	0.975	0.975	1.875	0.817	0.744

注：ECVI一栏中，第一列的数据为理论模型的ECVI值，第二列为饱和模型的ECVI值，第三列为独立模型的ECVI值.（下同）

模型1(3-1)：指由样本3-1数据分析得到的结果；模型1(3-2)：指由样本3-2数据分析得到的结果.

3.2 模型的数据拟合与优选

根据验证性因素分析原理，模型1是合理的，只是说明这个模型是适合数据的一个模型，但不能说明是最优的. 基于理论分析，除了模型1，我们又提出了其它竞争模型，然后从这些竞争模型选择优化的模型. 模型2：学习能力与学习方式合并为一个因素，与其它3个因素组成一阶4因素模型. 模型3：知识结构与知识稳定合并为数学知识信念，与其它3个因素构成一阶4因素模型. 模型4：学习能力、学习方式与学习速度合并为一个因素，与其它两个因素构成一阶3因素模型. 模型5：知识结构与知识稳定合并为知识信念，学习能力与学习方式合并为能力方式，与学习速度构成一阶3因素模型. 模型6：学习能力与学习速度可以合并为

能力速度，与学习方式、知识信念构成一阶 3 因素模型．基于多组模型（Multi-group SEM）方法，检验模型 2 到模型 6 的拟合指数（如表 2），发现随着一阶因素的合并，竞争模型变得与数据不拟合．因此，在下面验证二阶模型时，我们只假设数学认识信念包括数学知识和数学学习信念两大主因素，有必要验证的模型有模型 7 和模型 8．模型 7：二阶两因素一阶 5 因素模型，即数学认识信念包括数学知识和数学学习信念两大因素，次因素与一阶 5 因素模型同质．模型 8：是指二阶单因素一阶 5 因素模型，即数学知识和数学学习信念合并为一个主因素，次因素与一阶 5 因素模型同质．以上模型的拟合指数的具体情况见表 2．

表 2　各个竞争模型的整体拟合优度指标

	绝对拟合指数						
	$\chi^2(df)$（显著性）	GFI	RMR	RMSEA	ECVI		
模型 2	1 558.709(203)(0.000)	0.744	0.126	0.106	2.811	0.858	11.244
模型 3	1 270.690(203)(0.000)	0.808	0.124	0.094	2.323	0.858	11.244
模型 4	2 529.741(206)(0.000)	0.628	0.153	0.138	4.447	0.858	11.244
模型 5	2 457.604(206)(0.000)	0.656	0.173	0.136	4.325	0.858	11.244
模型 6	2 120.072(206)(0.000)	0.703	0.147	0.125	3.753	0.858	11.244
模型 7	379.239(203)(0.000)	0.944	0.044	0.038	0.812	0.858	11.244
模型 8	373.082(199)(0.000)	0.943	0.047	0.039	0.821	0.858	11.244

	增值拟合指数				简约拟合指数		
	AGFI	TLI	IFI	CFI	χ^2/df	PNFI	PGFI
模型 2	0.681	0.757	0.788	0.787	7.678	0.671	0.597
模型 3	0.761	0.809	0.833	0.832	6.259	0.709	0.649
模型 4	0.544	0.590	0.636	0.635	12.280	0.549	0.512
模型 5	0.636	0.662	0.700	0.699	10.292	0.605	0.573
模型 6	0.636	0.662	0.700	0.699	10.292	0.605	0.573
模型 7	0.930	0.968	0.972	0.972	1.868	0.828	0.757
模型 8	0.929	0.968	0.971	0.971	1.894	0.831	0.760

根据竞争模型比较的指数标准，GFI、AGFI、TLI、IFI、CFI 的值均应大于 0.90，$\chi^2(df)$、χ^2/df、RMSEA、ECVI 的值越小越好[10-14]．由表 2 的各个模型的拟合指数看出，模型 2~模型 6 各拟合指数没有达到临界值，而模型 7 和模型 8 的拟合指数均达到了临界值，似乎可以接受．我们进一步考察模型 7 和模型 8 的内在结构，发现 22 个观测变量在其所反映潜在变量上的因素负荷量，介于 0.70~0.89 之间，而且所有参数估计的 t 值大于 2.58，达到 0.01 显著水平．说明模型中潜在变量的效度是可以接受的．可是，模型 7 和模型 8 二阶因素对一阶因素的解释量较低，最小值为 17%．从整体上比较看，模型 1 相对这些竞争模型来说最优．

3.3　问卷 3 的模型拟合度评价

问卷 3 的模型（模型 1）是通过对问卷 2 不断调整模型与特定样本数据分析以及理论分析的产物，至于这一模型能否普遍适用于其他样本，我们以正式调查有效样本 3-2（n=613）的数据，进行验证性因素分析．分别从基本拟合标准、整体模型拟合度以及模型内在结构拟合度等角度来探讨数据与模型的拟合度，以确保问卷的结构效度，保证问卷的普适性．由于模型的分析采用全信息技术（Full Information Technique）估计法，此类估计法是依据正态理论来设计的，因此估计法受到样本性质的影响[10-14]，根据样本 3-2 数据分析结果知，观察变量的偏度值介于−1.868—0.527 之间，峰度值介于−0.45~3.341 之间．依据 Kline（1998）[15]指出的当偏度（Skewness）的绝对值大于 3 才视为极端，峰度（Kurtosis）的绝对值大于 10.0 才有问题．因此，由结果显示所有观测变量的偏度和峰度，对使用正态分布的估计法影响不大，所以本研究采用 AMOS6.0 版以极大似然估计（Maximum Likelihood，ML）法来估计模型的参数．

3.3.1　基本拟合标准

模型评价之前，要确定参数估计值是否合适．一般地，有以下 3 个基本标准：(1) 不能有负的误差方差；(2) 标准化系数不能超过 1 或太接近 1（≥0.95）；(3) 不能有大的标准误．分析结果表明：潜在变量对观测变量的参数估计、潜在变量与潜在变量的参数估计和观测变量的测量误差，模型在未标准化之前所有估计值没有负的误差方差．从图 1 知，标准化的因素负荷量介于 0.703~0.877 之间，没有较大的标准误．因此，整体来说，模型与数据的基本拟合达到标准．

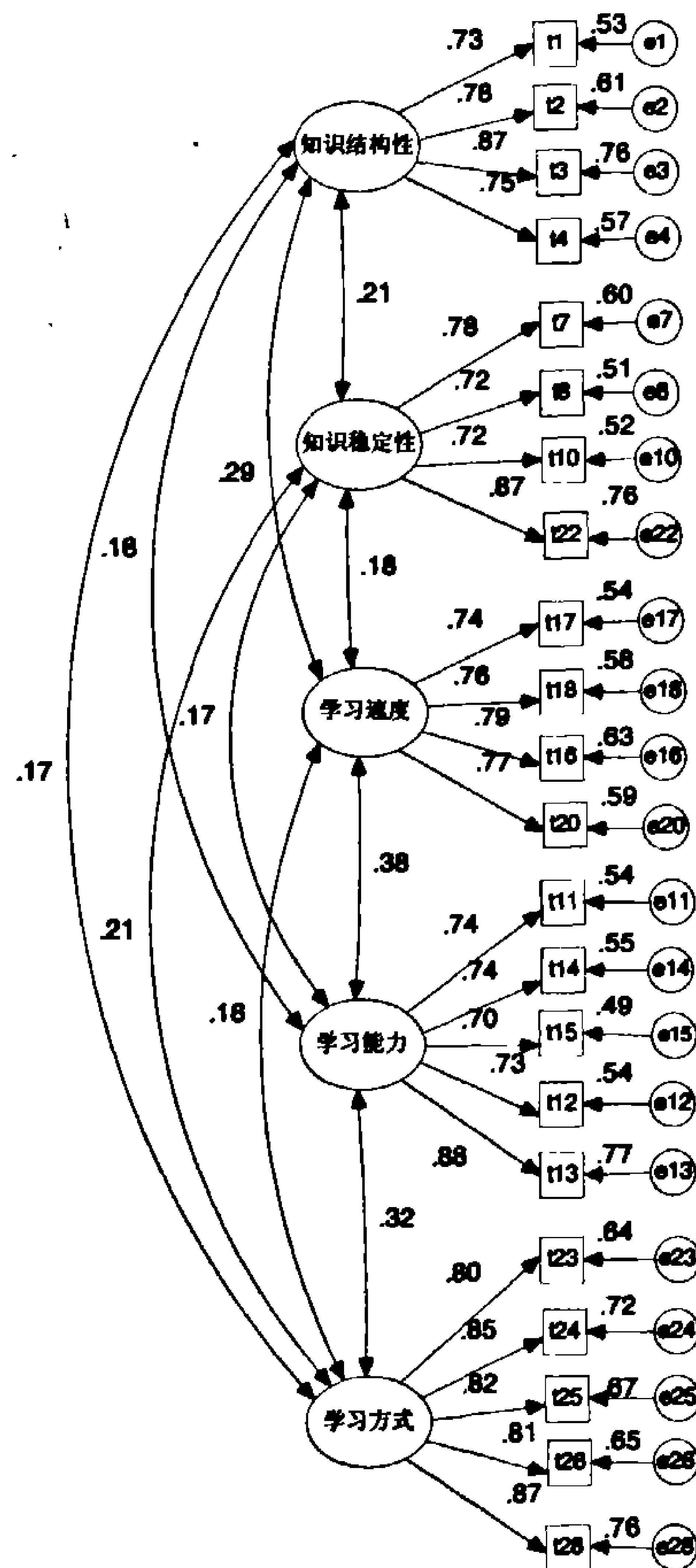


图 1　初中生数学认识信念结构图（图中为标准化系数）

3.3.2　整体模型拟合度

要验证理论模型假设，须先评价模型的整体拟合度，结果如表 1 所示．从表 1 看出，修正模型的 χ^2 值为 373.082，p=0.000，达显著性差异，但 χ^2 和 χ^2/df 值受样本影响较大，

本研究样本为613，属于较大样本，故不能通过标准，拒绝模型1．但基于大部分学者建议[10~14]，应该采用绝对拟合指数、增值拟合指数、简约拟合指数等3个方面的多个指数进行评价．首先，理论模型的拟合度指数，GFI（Goodness of Fit Index）、调整后拟合度指数AGFI（Adjusted Goodness of Fit Index）、增值拟合度指数IFI（Incremental Fit Index）、TLI（即NNFI指数）等皆在理想的数值0.9以上．上述指数意指一个模型可以解释观测数据的共变量百分比，其值越接近1表示拟合度越佳．一般而言，大于0.9就表示拟合度极佳．从表1知这几个指标均大于0.9，且理论模型的ECVI值比饱和模型与独立模型的ECVI值都小．其次，均方根残差RMR（Root Mean Square Residual）值愈小表示模型的拟合度愈佳，而本模型的RMR为0.370，这说明残差较小，拟合度较佳．最后，作为每个自由度差距量数（Measure of Discrepancy per Degree of Freedom）的渐近误差均方根，RMSEA（Root Mean Square Error of Approximation）为0.038，表示模型拟合不错，PNFI和PGFI均大于0.5．故此，整体而言，大部分的绝对拟合指数、增值拟合指数和简约拟合指数都达到所接受值，显示修正模型具有较理想的外在品质，能解释相关因素的观测数据．

3.3.3 模型内在结构拟合度

模型的内在结构拟合优度的评价一般需要从测量模型的内在结构和结构模型的内在结构的拟合优度两方面考虑．从图1知，22个观测变量在其所反映潜在变量上的因素负荷量，介于0.70~0.87之间，而且所有参数估计的t值大于2.58，达到0.01显著水平．这一结果符合Bentler、Wu和JÖreskog和Sörbom等人的建议，即测量模型中的因素负荷量最少必须在0.45以上，则表示观测变量具有足够用于反映潜在变量的效度．说明本模型中潜在变量的效度是可以接受的．从图1知，潜在变量对观测变量的解释量在0.49~0.77之间，除t15之外，其它的都大于0.5，说明绝大多数观测指标能够被潜在变量解释的程度较高，单个观测指标的信度可以接受．另外，潜在变量的建构信度介于0.850~0.917之间，明显大于0.6，说明了潜在变量的各观测指标之间的内在一致性高．所有潜在变量的平均抽取变异量介于0.530~0.896均大于临界值0.5，说明观测指标的总方差有50%以上来自潜在变量，其它的则是测量误差所导致．

综上，通过对模型1的基本适合标准、整体模型适合度及模型内在结构适合度3方面的检验，我们认为模型1具有较好的拟合优度，是一个能够反映研究内容的模型．

3.4 问卷3的模型多组验证性因素分析

多组验证性因素分析目的在于检验："各组（例如男、女组）的因素结构是否相同？某些路径参数在不同的组是否有显著性差异？"[10]在这里，我们讨论男女生的数学认识信念的潜在因素个数，以及每个因素所含的题项是否相同？因素负荷量是否相同？以检验数学认识信念模型是否既适合男生也适合女生，男女生是否共享同一套因素负荷，进一步说明初中生数学认识信念的结构．

在样本3-2中，有310个男生，303个女生，男女生人数接近1∶1，人数差异不大，这样防止了估计值迁就人数较多的组．我们先后单独对模型1进行参数估计，结果如表3所示，拟合相当好，即目前的5阶因素模型，吻合男、女的数据．未设限制模型9的χ^2达显著性水平，而我们知道χ^2易受样本量影响，不能轻易地仅仅根据χ^2值来判断模型的拟合情况，从表3知，模型9的RMSEA小于0.05，TLI、CFI均大于0.9，综合考虑，这些拟合指数说明了男女生的数学认识信念的潜在因素个数，以及每个因素所含的题项相同；进一步发现男女组负荷相同（如表3），结果是$\chi^2(415)=694.798$，$\triangle\chi^2(17)=28.783$（$p$=0.037），显著性大于0.01，$\triangle$RMSEA＝0.000，$\triangle$TLI＝0.000，$\triangle$CFI＝0.001，所以可认为男女组因素负荷量相同．但由于整体检验的χ^2可能会蒙蔽特定因素负荷量之间的效果，因此我们进行指标层次量尺不变性之假设检验，以进行不同组间在特定因素负荷量上是否相同的事后检验．结果表明，其参数的t值并没有大于临界值1.96（0.05显著水平）．因此，男女生在22个观测变量的因素负荷量没有显著性差异，即男女生共享同一套因素负荷．

表3 男女生两样本CFA分析模型拟合度评估摘要表

		χ^2（显著性）	df	RMSEA	TLI	CFI
模型1	全体样本估计	373.082(0.000)	199	0.038	0.971	0.975
模型1	男性样本单独估计	321.291(0.000)	199	0.045	0.958	0.963
模型1	女性样本单独估计	344.718(0.000)	199	0.049	0.957	0.963
模型9	两组同时估计但不设限制	666.010(0.000)	398	0.330	0.957	0.963
模型10	两组同时估计限制负荷相等	694.798(0.000)	415	0.330	0.957	0.962

4 结　论

研究表明：(1)初中生数学认识信念结构的一阶5因素模型在竞争模型中拟合数据更佳．(2)初中生数学认识信念结构（问卷3的模型）包括5个因素，各个因素之间既相关又相互独立．因素一是数学知识结构性信念，即指初中学生相信或认为数学知识是孤立的、片断性的概念，还是与其它知识、生活实际是有紧密联系的．因素二是数学知识稳定性信念，即指初中学生相信或认为数学知识是永远不变的真理，还是不断发展变化的、甚至有误的．因素三是数学学习速度信念，即指初中学生相信或认为数学学习是一件很快就能够完成的事情，还是一个缓慢的过程．因素四是数学学习能力信念，即指初中学生相信或认为自己的数学学习能力是先天注定的，还是可以通过后天努力改善的．因素五是数学学习方式信念，即指初中学生相信或认为数学学习是依靠被动接受、机械学习为主，还是依靠主动建构、理解学习为主．对数学学习的意义与价值而言，总的说来，学生越是相信或认为前面5个因素的后者，对学习促进作用越大，他的信念也越有效．(3)男女生的数学认识信念潜在因素个数

和每个因素所含的题项相同，共享同一套因素负荷，这进一步证实了初中生的数学认识信念的一阶 5 因素模型的可靠性与稳定性.

[参 考 文 献]

[1] 喻平，唐剑岚．个体认识论的研究现状与展望[J]．心理科学进展，2007，15（3）：443–450.

[2] 唐剑岚．学生数学认识信念的研究述评[J]．数学教育学报，2007，16（1）：29–33.

[3] Muis K R. Personal Epistemology and Mathematics: A Critical Review and Synthesis of Research [J]. Review of Educational Research, 2004, 74(3): 317–380.

[4] Chan K, Elliot R G. Exploratory Study of Hong Kong Teacher Education Students' Epistemological Beliefs: Cultural Perspectives and Implications on Beliefs Research [J]. Contemporary Educational Psychology, 2003, 27(3): 392–415.

[5] Karabenick, Stuartl Moosa, Samira. Culture and Personal Epistemology: US and Middle Eastern Students' beliefs about Scientific Knowledge and Knowing [J]. Social Psychology of Education, 2005, 8(4): 375–393.

[6] Schommer M. Effects of Beliefs about the Nature of Knowledge on Comprehension [J]. Journal of Educational Psychology, 1990, 82(3): 498–504.

[7] Duell O, Schommer M. Measures of People's Beliefs about Knowledge and Learning [J]. Educational Psychology Review, 2001, 13(4): 417–447.

[8] Buehl M M, Alexander P A, Murphy P K. Beliefs about Schooled Knowledge: Domain Specific or Domain General? [J]. Contemporary Educational Psychology, 2002, 27(3): 415–449.

[9] Schoenfeld A H. Exploration of Students' Mathematical Beliefs and Behavior [J]. Journal for Research in Mathematics Education, 1989, (20): 338–355.

[10] 侯杰泰，温忠麟，成子娟．结构方程模型及其应用[M]．北京：教育科学出版社，2004.

[11] 黄芳铭．结构方程模式理论与应用[M]．北京：中国税务出版社，2005.

[12] 温忠麟，侯杰泰，马什赫伯特．结构方程模型检验：拟合指数与卡方准则[J]．心理学报，2004，36（2）：186–194.

[13] Lei Ming. The Effect of Varying Degrees of Nonnormality in Structural Equation Modeling [J]. Structural Equation Modeling, 2005, 12(1): 1–27.

[14] 李茂能．结构方程模式软件 Amos 之简介及其在测验编制上之运用：Graphic & Basic [M]．台北：心理出版社，2006.

[15] Kline R B. Principles and Practice of Structural Equation Modeling [M]. New York: The Guilford Press, 1998.

SEM of Research on Epistemic Beliefs about Mathematics for Junior Middle School Students

ZHOU Ying[1], TANG Jian-lan[1, 2], HUANG Guo-wen[1]

(1. Mathematics Institute of Guangxi Normal University, Guangxi Guilin 541004, China;

2. Mathematics & Computer Science Institute of Nanjing Normal University, Jiangsu Nanjing 210097, China)

Abstract: Based on investigation and SEM research, the paper evaluated the scale on epistemic beliefs about mathematics including modification, assessment and comparison, and the results show the scale assessed five epistemic belief factors including beliefs about the structure of knowledge, stability of knowledge, speed of learning, ability to learn, and ways to learn. A five first-order factors was best .By evaluation of preliminary fit criteria, overall model fit and fit of internal, and multiple-group confirmatory factor analysis, all the results showed that the a five first-order factors was a fit model and the structure and factor load are same between boys' and girls'. The results implied stability and prediction of the scale was good.

Key words: epistemic beliefs about mathematics; model comparison; multiple-group confirmatory factor analysis; SEM

[责任编校：陈汉君]

华东四省一市部分高中生数学学习效能的研究

陈陆巧[1]，温横选[2]，温 暖[2]，蒋维轩[3]，丘丽珠[3]，周希杰[2]

（1．浙江瑞安中学，浙江 瑞安 325200；2．浙江瑞安云江高级中学，浙江 瑞安 325207；3．台湾新竹香山高中）

摘要：高中生数学成绩、听课效率与“思维灵活性”关系密切，复习效率与“概括能力”关系密切，与数学成绩和学习效率相关系数最高的因素是“学习毅力”．提高高中学生数学学习效能的对策有：要增强学生的责任感，激励他们奋发上进的积极性；培养学生先复习后作业、复习中对重点、难点内容多动手推导的习惯；要用“一题多解”、“一题多变”、“一题多用”等方法；应注意到频率变化曲线相似的变量的调控．

关键词：效能；相关因素；对策

中图分类号：G632.0 **文献标识码**：A **文章编号**：1004-9894（2008）02-0036-03

1 问题提出

高中生在数学学习中投入的时间和精力较多，但取得的成绩往往不尽人意．有的学生甚至会因数学学习不好，而影响到对其它学科的学习积极性．然而在众多的数学学习效能的研究中往往思辨的多、实证的少[1-4]．为了探索这一广大高中数学教师和学生迫切需要解决的问题，我们开展了本课题的调查和研究．

2 方 法

2.1 调查样本及特征

我们选取了教育较发达的华东地区的7所学校（浙江瑞安中学、瑞安云江高中、瑞安第五中学、福建福鼎一中、江西信丰六中、台湾新竹香山高中和上海南洋中学）的高一、高二、高三学生进行调查．共发出调查问卷651份，收回有效问卷636份．其中，男生325人，占51.10%；女生311人，占48.90%．高一、高二、高三分别占5.82%，41.08%和53.10%．学生年龄在14~20岁之间．包含3所重点中学，学生人数占35.69%；3所普通中学，学生人数占50.16%；1所民办中学，学生数占14.15%．

2.2 调查工具

参考学习效能（问题）诊断测试4.2软件，编制调查问卷．经预测后用方差极大正交旋转法进行因子分析，显示有较好的信度和效度．

3 结果与分析

对不同性别学生的数学学习成绩自我评价，听课、作业与复习效率进行频率比较，所得结果如表1至表4:

表1 学习成绩自我评价（百分比）

	好	较好	一般	差	很差
男（n=325）	2.04	5.82	25.31	8.96	8.96
女（n=311）	0.79	4.40	24.21	11.16	8.33

表2 数学听课效率（百分比）

	高	较高	一般	低	很低
男	2.04	14.31	24.06	7.55	3.14
女	1.10	12.89	25.63	7.08	2.20

表3 数学作业效率（百分比）

	高	较高	一般	低	很低
男	2.52	8.81	25.16	9.43	5.19
女	1.01	7.08	26.73	10.22	3.77

表4 数学复习效率（百分比）

	高	较高	一般	低	很低
男	2.36	8.02	26.57	9.12	5.03
女	0.94	8.96	27.20	8.65	3.14

表1至表4中的数据显示：男生数学成绩好的和很差的人数比例均高于女生，说明男生两极分化的现象高于女生；3项效率比较，听课效率高或较高的人数比例高于作业或复习效率相对应的人数比例；作业效率很低的比其它两项效率很低的人数比例高．

探求与3个效率因素和对数学成绩直接影响较大的因素，用Spearman相关分析[5]，得到结果如表5：

表5 学习效率和数学成绩相关系数较大的因素

	听课效率	数学成绩自评	作业效率	复习效率
学习毅力	0.388 08	0.527 12	0.458 01	0.385 17
错误及时订正	0.373 86	0.397 29	0.359 84	0.334 85
会解灵活题目	0.340 18	0.435 86	概括归纳	0.315 22

收稿日期：2007-12-16

作者简介：陈陆巧（1965—），男，浙江瑞安人，中学高级教师，主要从事数学教育教学研究．

表5中的数据显示了与3个效率因素和数学成绩关系密切的因素. 例如，与听课效率关系密切的因素是心理因素的"学习毅力"，学习过程控制的"及时订正考试和练习中的错误"和智力因素的"碰到灵活的数学题不会束手无策"，即思维具有较强的灵活性等.

为了研究与各效率因素关系密切的因素间存在怎样的依存关系，分清它们的主次地位，便于抓住主要的因素进行有效的干预. 我们采用多元线性逐步回归，得到分析结果如下：

(1) 因变量：数学听课效率.

模型的 F 值为：1 361.66，概率值 $p<0.000\,1$，说明方程的线性是非常显著的. 方程对模型的拟合也很好，标准化回归系数如表6所示.

表6　数学听课效率的标准化回归系数

变　量	自由度	标准化回归系数
及时订正错误	1	0.399 57
思维灵活性	1	0.244 58
概括归纳能力	1	0.176 76

(2) 因变量：数学作业效率.

模型的 F 值为：1 081.67，概率值 $p<0.000\,1$，$r^2=0.945\,3$.（如表7所示）

表7　数学作业效率的标准化回归系数

变　量	自由度	标准化回归系数
复习时动手推导	1	0.189 31
对考试的焦虑	1	0.174 60
上课注意听讲	1	0.122 00

(3) 因变量：数学复习效率.

模型的 F 值为：1 576.36，概率值 $p<0.000\,1$，$r^2=0.925\,9$.（如表8所示）

表8　数学复习效率的标准化回归系数

变　量	自由度	标准化回归系数
概括归纳能力	1	0.343 02
记忆能力	1	0.203 66
及时订正错误	1	0.175 08

研究变量间频率曲线变化趋势的拟合程度. 寻求对学习效率变化曲线拟合程度高的变量，以提高对学习效率因素调控的灵敏度. 我们采用 χ^2 检验得到分别与3个效率的频率变化曲线变化趋势相似程度最高的变量，它们的卡方分析结果如表9至表11：

表9　听课效率和记忆内容提取能力

	自由度	值	*Prob*
卡方	16	69.63	<0.000 1
似然比卡方	16	1	<0.000 1
M-H 卡方	1	38	<0.000 1

表10　作业效率和思维灵活性

	自由度	值	*Prob*
卡方	16	138.25	<0.000 1
似然比卡方	16	116.05	<0.000 1
M-H 卡方	1	85.90	<0.000 1

表11　复习效率和考试焦虑

	自由度	值	*Prob*
卡方	16	95.11	<0.000 1
似然比卡方	16	75.42	<0.000 1
M-H 卡方	1	30.93	<0.000 1

考虑到各因素之间交互作用，对数学学习效率和成绩等的总体（学习效能）会产生综合的影响. 找出对学习效能影响最大的变量组，我们采用了 Cancorr 典型相关分析，把学习效能各变量的线性组合记作V组变量；把与它们分别有最高相关系数变量的线性组合记作W组变量；把与学习效能各变量聚类分析后在同一组的变量记作T变量. 由典型相关分析结果发现对学习效能而言，影响较大的是W组变量.

由典型相关显著性检验，得到第一典型变量是显著的 *Prob*>*F* 值<0.000 1，以后各组不显著. 听课、作业、复习效率与V组的相关系数分别达0.844 3、0.850 1、0.735 2，而学习效能各因素的第一典型变量与W组中的因素：对数学成绩的自我评价、学习毅力、练习和考试中错误能及时订正、思维的灵活性、概括能力的相关系数分别是0.604 9、0.501 3、0.431 8、0.428 1、0.408 1，有较好的相关性.

4 对　策

针对男生数学成绩很差和听课、作业、复习效率很低的人数百分比高于女生的现象；经过个案调查得出其原因是男生的学习责任感低于女生，不少男生在遇到困难后，会产生消极放弃的想法. 所以要增强他们的责任感，激励他们奋发上进的积极性，进而转变他们数学成绩和学习效率低的现状.

由于数学听课效率高的人数百分比多于作业和复习效率高的百分比，而作业效率低的百分比很高. 所以建议多采用有针对性的、对作业中疑难问题讲解的习题课和对知识体系进行归纳、整理的复习课. 注意培养学生先复习后作业的习惯，在复习中对重点、难点内容多动手推导的习惯. 注意培养学生对知识的概括、归纳、总结的能力，来提高复习和作业的效率.

数学成绩、听课效率与"思维灵活性"关系密切；复习效率与"概括能力"关系密切，它们都属于智力因素. 因此数学课不单纯是知识的传授，更重要的是要发展学生的智力，培养学生的能力. 由个案调查发现"一题多解"、"一题多变"、"一题多用"等方法，既能提高学生思维的灵活性，又能在发展学生智力的同时提高数学学习效率.

研究发现：与数学成绩和学习效率相关系数最高的因素是心理因素的"学习毅力". 由于高中数学学科具有高度的

抽象性、严密的逻辑性和应用的复杂性，学生在学习中会遇到各种困难，所以不能单纯从兴趣出发，要重视培养学生的学习毅力，要培养他们不畏艰苦、勇于探索的精神和坚忍不拔的意志力．同时要帮助学生养成良好的学习习惯，优化对学习过程的控制．如及时订正错误、先复习后作业等，这样才会提高数学学习的效率．

要提高学生的数学成绩或学习效率，除了选择与该效率相关最高的因素进行调控外，还应注意到对和它频率变化曲线相似的变量的调控．例如，指导学生对数学知识的记忆方法，提高学生记忆能力，使学生能及时联想起旧知识来提高听课的效率．使学生对考试保持适当的焦虑，以提高他们的复习效率等．特别要注意的是：要从整体上提高学生的数学效能！典型相关分析的结果告诉我们，必须同时从提高学生的学习毅力、培养思维的灵活性、概括能力和养成及时订正错误的良好习惯4方面下手，才会收到较好的效果.

5 探 讨

从7所学校的数据显示：进入高中后，学生数学成绩提高的人数频率按提高很快、较快、一般、较慢和很慢分布，有4种不同的类型．一是，由高到低的学校有1所；二是，由低到高的学校有两所；三是，两端高、中间低的学校有1所；四是两端低、中间高的有3所．形成这些差别的原因还有待进一步的研究，它将有助于我们进一步揭示学生数学成绩提高的原因和规律．

[参 考 文 献]

[1] 王光明．数学教学效率论（理论篇）[M]．天津：新蕾出版社，2006.

[2] 史可富．高效数学学习的学生心理特征模型[J]．数学教育学报，2006，15（4）：79–42.

[3] [美]格劳斯．数学教学研究手册[M]．陈昌平译．上海：上海教育出版社，1999.

[4] 喻平．中学生自我监控能力和CPFS结构对数学学业成绩的影响[J]．数学教育学报，2004，13（1）：23–26.

[5] 卢纹岱．SAS/PC统计分析软件实用技术[M]．北京：国防工业出版社，1996.

East China Province a City of Four High School Students on the Effectiveness of Learning Mathematics

CHEN Lu-qiao[1], WEN Heng-xuan[2], WEN Nuan[2], JIANG Wei-xuan[3], QIU Li-zhu[3], ZHOU Xi-jie[2]

(1. Rui'an Middle School, Zhejiang Rui'an 325200, China;

2. Rui'an Yunjiang High School, Zhejiang Rui'an 325207, China;

3. Xinzhu Xiangshan High School, Taiwan, China)

Abstract: Having surveyed the effectiveness of mathematic learning among 651 high school students in the Four Provinces And One City of East China, and having analysis the results using SAS software, draw the conclusion about larger impact factors on the efficiency of students' listening in class, exercising and reviewing and the mathematic achievements as wall as the similar factors. Explore several major factors, which influence the three factors. Then interviewing some students, and using the method of combining quantitative and qualitative, got some measures of how to enhance senior high school students' efficiency of mathematic learning, such as strengthening students' sense of responsibility, encourage their activeness, cultivate their good habits of reviewing before doing exercises etc. We should pay attention to the controlling of the variables similar to the frequency curves.

Key words: effectiveness; related factors; countermeasures

[责任编校：陈汉君]

不同计算能力儿童早期加减法策略运用差异的比较研究

刘　颂[1,2]，许晓晖[3]

（1．北京师范大学 教育学院，北京　100875；2．北京联合大学 特殊教育学院，北京　100075；
3．首都师范大学 教育学院，北京　100089）

摘要：加减法策略反映儿童对数概念及其关系的理解与运用，是衡量儿童早期数学认知发展水平和个体差异的重要指标．可采用个别测查法对儿童早期加减法策略运用的年龄内个体差异进行考察．研究发现：儿童早期加减法策略运用差异不仅表现在策略使用数量、策略分布、策略执行正确率方面，而且题目难度对不同计算能力儿童策略选择和执行的影响程度不同，高分组、中间组儿童的策略运用比低分组儿童表现出更明显的适应性特点．

关键词：加减法；策略选择；策略执行；计算能力

中图分类号：G420　**文献标识码**：A　**文章编号**：1004-9894（2008）02-0039-05

1　问题的提出

策略指信息加工过程的执行和控制环节[1]，主体通过使用策略可以达到解决问题的目的[2]．在数学认知领域，加减法策略的探讨尤为热烈．Siegler、陈英和等国内外学者的研究一致发现，儿童加减法策略发展具有多样性、适应性、渐变性等基本特征[3~5]．在研究策略自身发展特点的同时，研究者开始探讨策略发展的个体差异及其影响因素．年龄间差异，即发展的阶段性特点，首先受到关注[4~5]．随着研究的深入和丰富，同一年龄段之内的儿童所表现的策略差异逐渐被发现和重视，研究者通过标准数学成就测验划分出不同数学认知能力的儿童，比较其策略运用差异，结果显示，数学认知能力较低的儿童倾向于选择数手指等低水平策略且正确率较低，提取策略使用频率少且错误率高，而且，这种落后于同龄人的策略运用模式将持续影响儿童的数学学习成就和观念[6~8]．因此，深入探讨儿童策略运用的年龄内差异，不仅可丰富和完善有关儿童策略发展规律的认识，更重要的是，为制定具有针对性的数学干预方案提供心理学理论支持和实证依据．

儿童早期正处在自发运用策略解决加减运算的萌芽阶段；简单的加减运算，对儿童而言，是需要运用策略和调动其他认知资源去解决的算术问题，而非单纯来自机械记忆的结果．我们认为，儿童早期策略运用，不仅反映儿童对数概念及其关系的理解与运用，衡量儿童早期数学认知发展水平和个体差异，而且作为儿童的非正式数学认知能力之一，较为影响儿童进入小学的正式数学学习．因此，了解儿童早期策略运用的年龄内差异，具有理论和实践的双重价值．然而，由于已有研究多采用书面测查工具，研究被试较少涉及尚未掌握正式数学符号的学前儿童．少数研究即使包含学前儿童，但有的侧重比较策略运用的年龄间差异，有的只关注计算能力发展的结果性指标而忽视策略运用的过程性指标，因而儿童早期加减法策略运用的年龄内差异有待进一步证实．不同计算能力发展水平儿童是否具有策略运用差异？具体差异表现在哪些方面？不同计算能力儿童的策略运用是否表现出相同的适应性特点？本研究从策略使用数量、选择率与执行正确率、速度等角度分析不同计算能力儿童早期加减法策略运用的差异表现与特征，试图从更全面、更系统的角度探讨儿童早期加减法策略运用的年龄内差异，为进一步促进儿童早期计算能力发展奠定坚实基础．

2　研究方法

2.1　被试选取

从北京市8所普通儿童园（包括市立园、街道园、大学附属园、工厂附属园等）中选取220名大班儿童为被试，平均年龄5.86岁（男126，女94）．

2.2　测查任务

本研究根据儿童当时的数学认知发展水平，设计了10道题目，其中包括6道不进位算术题与4道进位算术题（不包含2±2及3±1这类题目），加法题与减法题各半，所有题目采用口头言语呈现．

2.3　测查过程

测查准备：两名主试准备好秒表、笔、记录纸，和前来测查的儿童熟悉3~5分钟．

实施测查：一名主试负责提问，另一名负责记录，采取个别测查法．指导语：“小朋友，老师今天请你来玩数字游戏．老师会说一些加法（减法）题目，请你想各种办法得出

收稿日期：2007-12-03
作者简介：刘颂（1974—），女，湖南益阳人，讲师，教育学博士，主要研究儿童数学认知发展与教育．

答案．你一有答案就大声告诉老师，老师还特别想知道你是怎么得出来的．”测试顺序为先加法后减法．在正式进入加法或减法的测试前，主持首先会让儿童分别做简单的 2+1 或 2–1 任务，让儿童熟悉任务程序．测试过程秒表计时，计时从主试说完题目开始，到儿童一开口说答案即停止；如果儿童要求重新念题或重做，则计时重新开始．儿童每做完一道题目，主试追问：“你想了什么办法？你是怎么得出来的？”测试中，主试排除采用速算技巧作答的儿童．根据儿童的外部行为和口语报告，进行策略编码．

2.4 数据的编码

对测查时记录的儿童外部行为和口语报告进行整理，制定出儿童加减策略的编码手册（见表 1）．根据编码手册、由两名编码者对记录进行数据的编码和录入，编码者评分一致性达到 99%．对于儿童在每个题目上的反应，答对的记为 1 分，答错的记为 0 分，因此加减运算的总分范围为 0~10 分．

表 1 儿童加减法策略编码手册

策略名称	策略说明
数手指	逐一点数手指
口头数数	唱数数列，无手指动作
摆手指	同时出示一定数量的手指代表数字，不经点数得答案
分解	把某个数字进行分解计算，如凑十
提取	从记忆中搜寻答案
其它	以上 5 种策略以外的方法，以猜测、放弃为主

根据已有研究结果及我们的进一步思考，本研究将从两个维度对上述策略分类，首先从答案是否从记忆中搜寻分为提取策略与支持性策略（包括数手指、口头数数、摆手指、分解），按照策略的外化程度分为内部策略（包括分解与提取）与外部策略（包括数手指、口头数数、摆手指）．

3 结果与分析

本研究着力探讨不同计算能力儿童的策略运用差异，因此依据儿童在本测查的加减运算总分划分为 3 组，前 33% 即高分组，中间 33%为中间组，后 33%为低分组，分别代表不同的计算能力水平．3 组儿童的平均年龄、性别分布均无显著差异．下面将逐一考察 3 组儿童加减法策略选择与执行的整体差异，在此基础上，进一步分析题目难度对不同计算能力儿童策略运用的影响，以较为全面、系统反映儿童早期策略运用的差异表现与特征．

3.1 儿童早期加减法策略选择差异

3.1.1 早期加减法策略使用数量差异

以儿童使用的策略数量为因变量，以组别为自变量进行单因素方差分析，结果表明，组间效应显著（$F(2,217)=8.430$，$p<0.001$），进一步多重比较显示，低分组儿童策略使用数量显著少于高分组、中间组儿童，后两组儿童的策略使用数量无显著差异．对 3 组儿童所使用策略数量的人数统计发现，65%的低分组儿童所选策略数量在两种或两种以下，57%的高分组、66%的中间组儿童所选策略数量在 3 种或 3 种以上．

表 2 三组儿童早期加减法策略运用数量差异 $M(SD)$

高分组	中间组	低分组	多重比较结果
2.67(1.05)	2.88 (0.99)	2.19(0.85)	高—中 高—低** 中—低***

注：* $p<.05$，** $p<.01$，*** $p<.001$

3.1.2 早期加减法策略分布差异

上述分析初步表明，儿童早期策略选择的数量有差异，那儿童策略选择的类型是否存在差异呢？卡方分析表明，高、中、低组儿童各策略的选择频次差异显著（$\chi^2(10)=367.780$，$p<0.001$），具体来讲，高分组、中间组儿童选择率最高的前 5 种策略依次为：提取、口头数数、数手指、摆手指、分解，低分组儿童选择率最高的前五种策略依次为：其他、数手指、提取、摆手指、口头数数（见表 3）．

表 3 加减法策略的选择率和正确率及平均反应时

策略类型	选择率（%）		
	高分组	中间组	低分组
数手指	14.6	17.1	27.9
口头数数	18.2	27.3	11.9
摆手指	12.7	13.9	13.1
分解	7.9	4.4	0
提取	42.8	27.8	18.8
其它	3.7	9.5	28.2
策略类型	**正确率（%）**		
	高分组	中间组	低分组
数手指	91.9	70.5	38.9
口头数数	94.8	69.1	44.9
摆手指	97.2	76.6	36.8
分解	95.5	79.4	—
提取	97.0	80.4	40.4
其它	87.5	41.1	4.3
策略类型	**平均反应时①（秒）**		
	高分组	中间组	低分组
数手指	13.6	17.9	16.0
口头数数	11.5	11.9	17.0
摆手指	11.2	9.7	11.7
分解	8.9	7.5	—
提取	3.3	5.8	6.6
其它	4.4	12.9	10.0

注：①只统计正确执行的策略反应时

3.2 儿童早期加减法策略执行差异

我们综合正确率与反应时（仅指正确执行的策略反应时）两个指标考察 3 组儿童策略执行差异．整体而言，高、中、低 3 组儿童的策略正确率递减（$F(2, 2197)=516.276$，$p<0.001$，而反应时递增（$F(2, 1529)=12.014$，$p<0.001$．进一步分析各策略的正确率，结果显示，除分解策略因低分组儿童没有选择而未能进一步多重比较外，高分组、中间组、低分组两两之间均存在显著差异（$F_{数手指}(2, 415)=56.387$，$p<0.001$；$F_{口头数数}(2, 431)=40.503$，$p<0.001$；$F_{摆手指}(2, 288)=59.366$，$p<0.001$；$F_{提取}(2, 684)=131.011$，$p<0.001$，说明儿童早期各种策略执行正确率明显分化（见表 3）．分析各策略的反应时，结果显示，3 组儿童仅在提取策略的反应时上存在显著差异（$F(2, 566)=9.634$，$p<0.001$），说明儿童早期大部分策略的执行速度未有明显分化（见表 3）．

3.3 题目难度对儿童早期加减法策略运用的影响

3.3.1 不同题目难度下儿童早期加减法策略分布差异比较

为考察不同计算能力发展水平儿童策略选择随题目难度变化的模式，我们分别考察了 3 组儿童解决不进位算术题与进位算术题时的策略选择差异（见图 1）．由图 1 可知，在解决不进位加减算术题时，高分组与中间组儿童使用最多的均是提取策略，其次是口头数数策略，再次是摆手指与数手指策略，低分组儿童主要选择数手指策略，其次为提取与其他策略，再次为摆手指与口头数数策略．卡方分析表明 3 组儿童解决不进位算术题的策略选择存在显著差异（$\chi^2(10)=191.895$，$p<0.001$）．在解决进位加减算术题时，高分组与中间组儿童的策略选择模式出现分化，具体来讲，高分组儿童主要选择提取策略，其次为口头数数、数手指、分解策略，中间组儿童主要选择口头数数与数手指策略，其次为提取策略；低分组儿童此时主要选择其他策略，其次为数手指，再次为口头数数与提取．3 组儿童解决进位加减算术题的策略选择差异显著（$\chi^2(10)=198.770$，$p<0.001$）．

为更好地考察不同计算能力水平儿童策略选择的变化情况，我们做了进一步的分析，结果表明：题目难度不同，对高分组、中间组与低分组的策略选择影响程度不同；随着题目难度的增大，高分组和中间组儿童提取策略使用频率下降，分解、口头数数、数手指策略的频次明显上升（$\chi^2_{高分组}(5)=53.479$，$p<0.001$；$\chi^2_{中间组}(5)=53.599$，$p<0.001$）；然而，随着题目难度增大，低分组儿童提取策略、数手指策略的使用频率显著下降，以放弃、猜测为主的其它策略使用频率显著上升（$\chi^2_{低分组}(5)=26.898$，$p<0.001$）．

3.3.2 不同难度题目下儿童早期加减法策略执行差异

比较 3 组儿童在两种题目难度下策略的整体执行正确率，结果发现题目难度与组别的交互效应显著（$F(2, 566)=9.634$，$p<0.001$，说明 3 组儿童的整体策略执行正确率随题目难度的变化情况不同，具体来讲，随题目难度增大，高分组儿童的策略正确率均为 90%以上，中间组儿童策略的正确率从 81.6%下降到 55.8%，低分组儿童的策略正确率从 42.0%下降到 11.6%．进一步分析 3 组儿童的各策略在不同题目难度下的执行情况，结果发现，随着题目难度增大，高分组儿童各种策略执行正确率无明显变化，中间组儿童除提取策略下降幅度较大外，其他各类策略执行正确率均有小幅下降，低分组儿童各种策略执行正确率的下降幅度不一，尤以数数、摆手指等外部策略的正确率下降幅度最大（见图 2）．

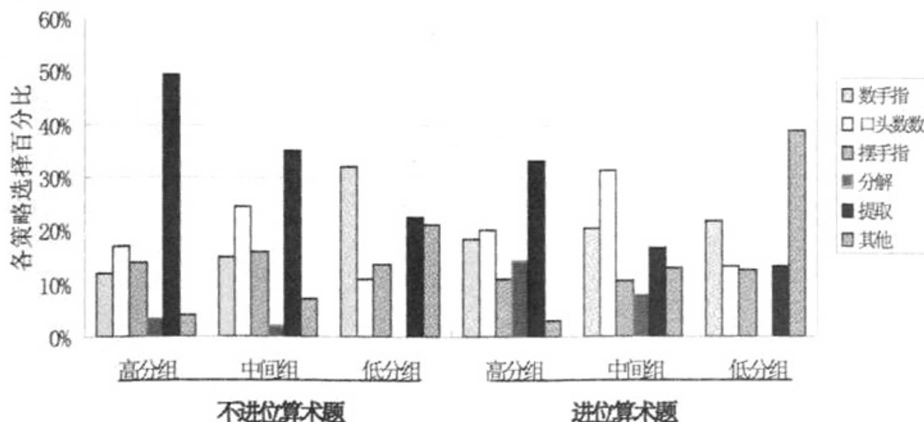


图 1　解决不同难度算术题时 3 组儿童策略选择差异

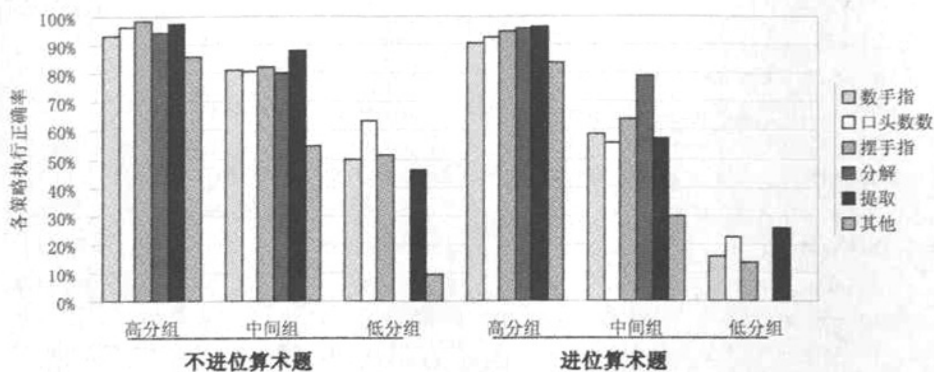


图2 解决不同难度算术题时3组儿童策略执行正确率差异

4 讨 论

加减法策略是反映儿童数学思维过程及个体差异的重要指标，是儿童早期数学认知能力的有机组成部分．本研究采用个别测查法深入分析不同计算能力儿童加减法策略的数量、使用率、执行正确率及速度，较为全面地探察了儿童早期加减法策略运用的年龄内差异．

以往研究认为学龄儿童在策略选择及策略执行存在年龄内差异[6~8]，本研究进一步发现策略运用的个体差异伊始于儿童早期．从本研究的结果来看，儿童早期，尤其是高分组与低分组，在策略选择的多样性、策略选择的成熟水平、策略选择的适应性、策略执行的准确性4个维度上已形成鲜明对照，这种策略运用差异最终影响了儿童计算能力的整体表现水平，具体而言，高、中组儿童拥有更为多样的策略库，支持性策略为主选策略且执行准确，同时，他们也倾向于更多、更快、更准确地使用提取策略，并且其策略选择适应题目难度变化且执行正确率高，因此他们能获得较高的计算测查分数；低分组儿童策略运用数量相对单一，主要依赖外部的支持性策略且执行错误率较高，他们从未使用分解策略，提取策略的使用频率少、速度慢且错误率高，当题目难度增大时，他们更多选择放弃、猜测等低效策略，较少表现出适应性变化的特点，因而，其计算测查分数较低．

为什么儿童早期策略运用模式会有如上差异呢？我们认为，这可能主要源自3组儿童在工作记忆[9]、元认知[1]、相关数概念[7, 10]等深层次能力与知识的差异．第一，工作记忆首要影响外部策略执行的准确性，进而间接影响儿童的策略分布．5~6岁儿童处于前运算思维向形象运算思维过渡的阶段，简单计算事实还未完全进入其长时记忆系统，儿童主要借助外在表征并在问题解决过程中建构、理解数量关系以及存储相关事实．此时，手指、口头数数等外部策略，一方面可满足儿童表征抽象数量意义的需要，另一方面要求儿童同时监控数数的个数与对应数字．高分组、中间组儿童拥有适宜的工作记忆容量，帮助儿童有效监控策略执行过程，避免漏数、多数等错误答案，保证答案的精确性与提高策略执行的熟练程度，同时避免信息过快衰竭，使问题与正确答案之间形成有效联系，进而，这种联系有助于正确的简单计算事实顺利进入长时记忆系统，形成更多呈峰态分布的联结强度，保障了儿童提取策略使用的可能性以及答案的准确性．然而，低分组儿童的工作记忆容量有限，影响了外部策略的执行效能，进而限制了提取策略的使用频率与降低了答案准确性，因而问题与答案之间的联结强度多呈低平分布，这迫使儿童更多依赖数手指等外部策略解决问题．

其次，3组儿童在策略运用水平及主动适应性上的差异可能受制于不同的元认知能力．已有研究指出，元认知能力影响儿童自觉运用策略以及针对特定问题调节策略的能力，并造成儿童对自己、对任务及策略的认识程度不同[11]．本研究发现，当题目难度增大时，低分组儿童不是更多选择支持性策略，而是更多选择放弃、猜测等策略；甚至个别低分组儿童无法提取答案时，固执使用猜测这种低效的方法．这源自两方面的原因，第一，低分组儿童策略相对单一，第二，低分组儿童对自己运用各种策略的效能、当前任务的难度等方面的认识有限，较为缺乏根据问题情境自觉调节其策略运用的能力，从而影响了计算策略运用的灵活性与准确性．

第三，3组儿童可能对相关数概念的理解程度不同．不少策略理论和实证研究都强调特异性知识对儿童加减法策略表现的作用，比如数量概念[10]与数数基本原则[7]．在儿童早期，儿童的数概念理解可能主要来自个体策略运用的实践过程．高分组、中间组儿童的策略有效运用，不仅使其获得更为丰富的策略使用经验，更为重要的是，可促使儿童主动、积极理解与建构数量大小关系、数量的部总关系、运算的基本原则等数概念知识；进而，良好的数概念知识有助于儿童较多采用更趋成熟的策略类型，有助于儿童对策略运用具有更好的元认知知识与能力；因此，这种良性循环可持续促进儿童策略运用过程及结果的发展．与之相反，低分组儿童策略的运用、相关数概念、元认知水平之间极有可能形成恶性循环，不利于其计算能力的发展．例如，分解策略作为一种

内部策略，其使用前提为长时记忆系统存储了相关计算事实，且初步理解数量的部总关系，对儿童的认知能力提出了更高要求，因而我们不难理解低分组儿童为何极少使用分解策略.

根据本研究，我们建议，教师在早期数学教育中应重新认识计算策略对儿童数概念建构、数学思维发展、数学学习情感培养的价值，改变单纯关注计算准确性与速度的做法，这是教师了解儿童早期计算认知策略发展的个体差异并提供教育指导的重要前提. 在此基础上，教师应积极了解儿童计算认知策略发展的个体差异，重视从思维过程的角度了解儿童计算能力发展差异的内在原因，增进对儿童早期数认知发展评价的全面性与客观性；同时重视培养儿童多样灵活的策略运用意识与能力，并根据儿童策略运用的水平与策略发展规律提供适宜的策略指导，帮助儿童在概念理解的基础上发展熟练的计算能力，更好地促进儿童数认知能力的发展.

5 结　论

（1）不同计算能力儿童的加减法策略数量存在显著差异，表现为低分组儿童的策略运用数量显著少于高分组与中间组儿童.

（2）不同计算能力儿童的计算法策略选择存在显著差异，高分组、中间组儿童内部策略的使用频率多于低分组儿童，放弃、猜测等低效策略的使用频率少于低分组.

（3）不同计算能力儿童的加减法策略执行差异显著，高分组、中间组儿童的各种策略执行正确率均高于低分组儿童，高分组、中间组儿童的提取策略执行速度显著快于低分组儿童，其余策略 3 组儿童无执行速度差异.

（4）题目难度对 3 组儿童的策略选择和执行的影响不同：高分组、中间组儿童的策略选择表现出更明显的适应性特点，且策略执行正确率较高.

[参 考 文 献]

[1] 杨心德. 学习困难学生语义分类编码策略的研究[J]. 心理学报，1996，28（4）：375–379.

[2] 陈英和. 认知发展心理学[M]. 杭州：浙江人民出版社，1996.

[3] Siegler R. Strategic Development [J]. Trends in Cognitive Science, 1999, 3(11): 430–435.

[4] 沃建中，李峰，陈尚宝. 5~7 岁儿童加法策略的发展特点[J]. 心理发展与教育，2002，（4）：26–30.

[5] 陈英和，耿柳娜. 小学一～三年级儿童加减法策略选择的发展特点研究[J]. 心理发展与教育，2004，（2）：11–16.

[6] Geary D C, Hoard M K, Hamson C O. Numerical and Arithmetical Cognition: Patterns of Functions and Deficits in Children at Risk for a Mathematical Disability [J]. Journal of Experimental Child Psychology, 1999, (74): 213–239.

[7] Geary D C, Hoard M K, Byrd-Craven J, DeSoto M C. Strategy Choices in Simple and Complex Addition: Contribution of Working Memory and Counting Knowledge for Children with Mathematical Disability [J]. Journal of Experimental Child Psychology, 2004, (88): 121–151.

[8] Ostad S A. Developmental Differences in Addition Strategies: a Comparison of Mathematically Disabled and Mathematically Normal Children [J]. British Journal of Educational Psychology, 1997, (67): 345–357.

[9] 刘凡. 数字记忆广度对策略应用模式的影响[J]. 心理科学，1994，17（1）：21–27.

[10] Butterworth B. The Development of Arithmetical Abilities [J]. Journal of Child Psychology and Psychiatry, 2005, (46): 3–18.

[11] 陈英和，赵笑梅. 学习不良儿童的策略研究[J]. 心理科学进展，2005，13（5）：547–556.

Differences of Addition & Subtraction Strategy Usage between Young Children with High, Medium, and Low Arithmetical Abilities

LIU Song[1, 2], XU Xiao-hui[3]

(1. School of Education, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;

2. School of Special Education, Beijing United University, Beijing 100075, China;

3. School of Education, Capital Normal University, Beijing 100089, China)

Abstract: Addition and subtraction strategies reflect young children's comprehension and usage of numerical concepts, and were important indexes of developmental level of mathematical cognition and individual difference. This study focused on exploring differences of strategies usage between 5~6-year-old children by individual tests. The results were as follows: There were significant differences of strategy usage between 5~6-year-old children in strategy number, strategy choice, strategy accuracy; The difficulty of problems had significantly different effect on strategies selection and execution between children with different arithmetical abilities, that's children with higher arithmetical abilities were more adaptive to problem difficulty than those with low arithmetical abilities.

Key words: addition and subtraction; strategy selection; strategy execution; arithmetical ability

[责任编校：周学智]

第17卷第2期 数学教育学报 Vol.17, No.2
2008年4月 JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION Apr., 2008

初中生数学学习兴趣及自我效能与数学学业成绩的关系

焦彩珍

（西北师范大学 教育学院，甘肃 兰州 730070）

摘要：初中生数学学习兴趣、数学学业自我效能和数学学业成绩的关系调查结果表明：（1）数学成绩高分组和中分组学生在数学学习兴趣和数学学业自我效能各因子上均显著高于低分组学生；男生在数学学习兴趣和数学自我效能各因子上显著高于女生.（2）数学学习兴趣、数学学业自我效能和数学学业成绩之间存在显著的正相关，数学学业自我效能和数学学习兴趣对数学学业成绩回归效应显著.

关键词：数学学习兴趣；数学学业自我效能；数学学业成绩

中图分类号：G420 文献标识码：A 文章编号：1004-9894（2008）02-0044-03

1 问题提出

兴趣（interest）是个体力求探究某种事物，并带有强烈感情色彩的认知倾向，与个体好奇心、探求倾向密切相关.兴趣又可以分为个人兴趣（individual interest）和情境情绪（situational interest），个人兴趣可以解释为个体相对长时间地朝向某一种活动或某一知识领域的一种相对稳定的兴趣，情境兴趣是由一种情境的某些方面引起的兴趣，它持续的时间较短，对个体的知识、偏好系统产生影响，是一种唤醒状态的兴趣.学习兴趣（learning interest）[1~4]是在学习活动中产生的，力求探索学习内容的具有强烈感情色彩的认知倾向，是学习动机中最现实的和最活跃的因素，使学习活动变得积极、主动，并富有成效.研究者和教育实践工作者普遍认为，无论是个人学习兴趣还是情境学习情绪都会影响学生学习的努力水平、坚持性，因而，激发学生的学习兴趣是教育、教学过程获得成功的重要途径之一.

自我效能（self-efficacy）是指个体对于完成某种活动任务的能力信念或自信，是影响个体活动任务完成的一种重要的动机力量[5].个体的自我效能会影响个体行为任务的选择，努力程度与坚持性，影响个体的思维方式和归因发生，进而影响行为成就.学业自我效能[6~7]指的是学生对自己学习能力的判断，是对自己能有多大把握对付某种学业挑战能力的知觉和信念，数学学业自我效能是指学生对于数学学习任务完成的能力判断.同样，学业自我效能会广泛影响学生学业任务的选择、学习策略的运用和努力程度等，从而影响学生的学业成绩.

作为调节学习效果的非常重要的动机力量，学习兴趣与学业自我效能日益受到研究者的关注[1,5,8~12].尽管国内外对于学习兴趣、学业自我效能与学业成绩的关系有了一定的研究[13~14]，但对于数学学习兴趣、学业自我效能与数学学业成绩之间的关系还没有见到相关的研究，数学学习兴趣与学业自我效能的关系，数学学习兴趣、学业自我效能与数学学业成绩的关系如何还缺乏明确的回答.因此，本研究以初中生为研究对象，探讨初中生数学学习兴趣、学业自我效能与数学学业成绩的关系.

2 研究方法

2.1 被 试

选取西北师范大学第二附属中学初一、初二、初三年级各3个教学班共458名学生为测试对象，其中男生220，女生238，初一学生157名，初二学生152名，初三学生149名.

2.2 测量工具

数学学习兴趣问卷，该问卷共20道题，其中13道正向题，如："如果数学老师让我在黑板上做数学题，我会非常高兴"；7道负向题，如："假如不需要上数学课，我会更乐意来学校上学".评分采用5点量表，答案从完全同意到完全不同意，正向题完全同意=5……完全不同意=1；负向题相反.该问卷主要测量学生课堂、课余数学学习兴趣及对数学学习的一般兴趣.因素分析抽取3个因子是恰当的，特征值大于1的3个因子的解释率分别为21.712%、16.228%、13.506%，总解释率为51.446%.数学学习兴趣问卷的3个维度即数学学习兴趣由课内数学学习兴趣、课外数学学习兴趣和一般数学学习兴趣构成是恰当的.信度分析表明课内数学学习兴趣的内部一致性系数α=0.870 1，课外数学学习兴趣的内部一致性系数α=0.853 5，一般数学学习兴趣的内部一致性系数α=0.849 8，总问卷的一致性系数α = 0.849 9.

数学学习自我效能问卷，该问卷参考王振宏[7]编制的学业自我效能问卷编制而成，共10道题，其中8道正向题，如："与其它同学相比，在数学方面，我能够比他们学得更好一些"；2道负向题，如："在学习数学中遇到困难时，心里就想：我在数学学习上不行".评分采用5点量表，答案从完全同意到完全不同意，正向题完全同意=5……完全不同意=1；负向题相反.该问卷主要测量学生对数学学习的能力

收稿日期：2007-12-20

作者简介：焦彩珍（1968—），女，甘肃天水人，副教授，数学教育学硕士，主要从事数学课程与教学论方向研究.

知觉和能力自信．该问卷的一致性系数 α=0.926 4．

2.3 学业成绩指标

学生的数学成绩以学期数学平均成绩为指标．

2.4 施测过程

采用集体施测方式．以班为单位，由主试向学生说明指导语，待他们完全理解答题要求之后在测试问卷上开始作答．在测试过程中，被试遇到不理解的地方可向主试询问．所有问卷一次完成，测试时间为 20 分钟．

2.5 数据的统计分析

使用 SPSS13.0 统计软件进行数据处理．主要采用的统计方法有描述统计、相关分析、回归分析等．

3 研究结果与分析

（1）数学学习兴趣、学业自我效能在性别与组别上的差异分析．

以数学学习成绩把学生分为高分、中分、低分 3 组，数学学习成绩在 85 分以上（含 85 分）为高分组，有 148 名学生；数学学习成绩在 70 分（含 70 分）至 85 分为中分组，有 189 名学生；数学学习成绩在 70 分以下为低分组，有 121 名学生．分组及性别上的数学学习兴趣、数学学业自我效能各因子的平均分、标准差及差异检验结果见表 1：

表 1 数学学习兴趣及学业自我效能在性别与组别上的差异

	课内兴趣	课外兴趣	一般兴趣	总体数学兴趣	数学自我效能
女(238)	32.3±7.9	22.5 ±7.1	15.3±3.9	70.1± 17.9	34.1±10.6
男(220)	36.0±6.7	25.6± 6.3	16.3±3.4	77.8±15.1	38.8±8.4
$F_{性别}$	13.22**	11.28**	4.07*	12.88**	14.11**
高(148)	37.6±5.9	26.5± 6.3	17.3±3.1	81.4±13.9	43.5±7.0
中(189)	34.7±6.4	25.8±6.1	16.1±3.3	75.6±14.5	37.0±8.1
低(121)	28.5±8.3	19.2±6.9	13.2±4.1	61.0±18.3	26.9±8.4
$F_{组别}$	14.49**	9.17**	9.987**	15.46**	18.41**
$F_{性别\times组别}$	2.53	0.862	0.767	1.416	1.412

注：*P<0.05，**P<0.01

2（性别）×3（组别）方差分析表明，课内数学学习兴趣、课外数学学习兴趣、一般数学学习兴趣、总体数学学习兴趣、数学学业自我效能的性别主效应与组别主效应显著，各因子上的性别与组别的交互作用均不显著．事后比较表明，男生的课内数学学习兴趣、课外学习兴趣、一般学习兴趣、总体数学学习兴趣、数学学业自我效能显著高于女生；数学学习成绩低分组学生在课内数学学习兴趣、课外数学学习兴趣、一般数学学习兴趣、总体数学学习兴趣、数学学业自我效能方面显著低于高分与中分组学生．

（2）数学学习兴趣、自我效能与数学学习成绩的相关分析见表 2．

表 2 数学学习兴趣及自我效能与数学学业成绩之间的相关

	课内数学兴趣	课外数学兴趣	一般数学兴趣	总体数学兴趣	数学自我效能
数学学习成绩	0.50**	0.43**	0.46**	0.50**	0.63**

注：**P<0.01

表 2 的相关分析表明：无论课内数学学习兴趣、课外数学学习兴趣、一般数学学习兴趣、总体数学学习兴趣还是数学学业自我效能与数学学习成绩呈显著正相关．其中相关最高的是数学学业自我效能与数学学习成绩，相关系数 r=0.63．

（3）数学学习兴趣、自我效能与数学学习成绩的回归分析见表 3．

表 3 数学学习兴趣及自我效能与数学学业成绩的回归分析

	课内数学兴趣		课外数学兴趣		一般数学兴趣	
	β	R^2	β	R^2	β	R^2
数学学习成绩	0.216**	0.17	0.13	0.07	0.11	0.09

	总体数学兴趣		数学自我效能	
	β	R^2	β	R^2
数学学习成绩	0.213**	0.15	0.322**	0.21

注：**P<0.01

以数学学习兴趣各因子和数学学业自我效能为自变量，以数学学习成绩为因变量的多元回归分析表明，数学学业自我效能（β=0.322，P<0.001）、数学课内学习兴趣（β=0.216，P<0.01）、总体数学兴趣（β=0.213，P<0.01）对数学成绩的回归效应显著．

4 讨论与结论

这一研究结果表明，数学成绩低分组学生在数学学习兴趣和数学学业自我效能各因子上均显著低于高分组和中分组学生；男生在数学学习兴趣和数学自我效能各因子上显著高于女生；数学学习兴趣、学业自我效能和数学学业成绩之间存在着显著的正相关，数学学业自我效能和数学学习兴趣对数学学业成绩回归效应显著．这说明数学学习兴趣、数学学业自我效能是学生数学学习的重要动机力量．数学成绩优秀的学生可能有较强的数学学业自我效能感和较浓厚的数学学习兴趣，对自己的数学学习能力往往充满信心，常能体会到学习数学的乐趣；数学学习成绩差的学生往往有较低的数学学业自我效能感，对于数学学习没有信心，对数学学习不感兴趣，所以，缺乏数学学习兴趣以及对学习数学的能力自信不足是导致初中生数学学业不良的重要原因之一．

通过这一研究结论也发现，与数学学习兴趣相比，数学学业自我效能对于数学学业成绩具有更大的预期效应，这进一步证明了班杜拉自我效能理论的基本观点，能力与对于完成特定任务的能力自信即自我效能一样是影响任务完成水平的重要方面．在数学学习中，让学生对于数学学习能力充满自信非常重要，在中学数学教学中，无论何种形式的考试，考试题目往往难度太大，这样会造成一部分学生数学考试成绩过低，使其失去对数学学习能力的自信，丧失数学学习的兴趣，形成习得性无助感，从而导致他们数学学习的失败．

影响数学学习成绩的因素很多，关系也非常复杂，以上只分析了数学学业自我效能、数学学习兴趣、数学学习成绩之间的关系，对于其它影响学生数学学习成绩的内在变量，

如学习策略、成就动机等，需要进一步的研究.

[参考文献]

[1] 郭德俊，田宝，陈艳玲，等．情绪调节教学模式的理论建构[J]．北京师范大学学报（人文社会科学版），2000，161（5）：115-121.

[2] 孟昭兰．人类情绪[M]．上海：上海人民出版社，1989.

[3] Renninger A, Hidi S. Student Interest and Achievement: Developmental Issues Raised by a Case Study [A]. In: Wigfield A, Eccles J. Development of Achievement Motivation [C]. San Diego, CA: Academic Press, 2002.

[4] Schiefele U. Individual Interest and Learning----What We Know and What We Do not Know [A]. In: Hoffmann A, Krapp K A, Renninger, et al. Interest and Learning [C]. Kiel, Germany: Institute for Science Education, 1998.

[5] Bandura A. Self-efficacy: The Exercise of Control [M]. New York: Freeman, 1997.

[6] Ehrman M E. Understanding Second Language Learning Difficulties [M]. Thousand Oaks: Sage Publications, 1996.

[7] 王振宏．初中学生学业自我效能与学业成就关系研究[J]．心理发展与教育，1999，15（1）：39-43.

[8] 高申春．自我效能理论评述[J]．心理发展与教育，2000，16（1）：60-64.

[9] 何先友．小学生数学自我效能、自我概念与数学成绩关系的研究[J]．心理发展与教育，1998，14（1）：45-48.

[10] 周勇，董奇．学习动机、归因、自我效能与学生自我监控学习行为的关系研究[J]．心理发展与教育，1994，10（3）：30-33.

[11] Pajares F. Gender and Perceived Self-efficacy in Self-regulated Learning [J]. Theory into Practice, 2002, 41(2): 116-125.

[12] Schraw G, Lehman S. Situational Interest: Review of the Literature and Directions for Future Research [J]. Educational Psychology Review, 2001, 13 (1): 23-52.

[13] Alexander P A, Jetton T L, Kulikowich J M. Interrelationship of Knowledge, Interest, and Recall: Assessing a Model of Domain Learning [J]. Journal of Educational Psychology, 1995, 87(4): 559-575.

[14] Wade S. How Interest Affects Learning From Text [A]. In: Renninger K A, Hidi S, Krapp A. The Role of Interest in Learning and Development [C]. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1992.

Relationship of Mathematic Interest Self-efficacy and Mathematic Achievement of Junior School Students

JIAO Cai-zhen

(Educational School, Northwest Normal University, Gansu Lanzhou 730070, China)

Abstract: The purpose of this study was to examine the relationship of mathematic interest, self-efficacy and mathematic achievement of junior school students. The result indicated that mathematic learning interest, mathematic academic self-efficacy of students with low mathematic achievement was significantly lower than students with higher mathematic achievement. Similarly, a manifest gender difference existed among mathematic interest, mathematic academic self-efficacy and mathematic achievement of junior school students. Secondly, mathematic interest, mathematic academic self-efficacy were positively related to mathematic achievement. Specifically, mathematic academic self-efficacy and mathematic interest were two strong predictors to high mathematic achievement.

Key words: mathematic interest; mathematic academic self-efficacy; mathematic achievement

[责任编校：周学智]

第17卷第2期　　数学教育学报　　Vol.17, No.2
2008年4月　　JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION　　Apr., 2008

初中数学教师的课程取向的调查与分析

童　莉[1,2]

（1. 重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆　400047；2. 西南大学 数学与统计学院，重庆　400715）

摘要：课程取向是课程设计与课程实施的指导思想，初中数学教师的课程取向直接影响着他们的教学设计、教学的方法和策略，左右着他们具体的教学行为．初中数学教师的课程取向具有综合化趋势；不同教龄的初中数学教师在学术理性和科技发展取向上有显著差异；具有不同教学研修经历的初中数学教师在认知过程和人文主义取向上有显著差异；初中数学教师的新课程培训状况对学术理性、社会重建和人文主义取向有较为显著的影响；不同学历的初中数学教师在多数取向上没有显著差异．

关键词：课程取向；数学教师；专业发展

中图分类号：G443　**文献标识码**：A　**文章编号**：1004-9894（2008）02-0047-04

1　问题的提出

随着新一轮课程改革的深化，对课程的研究逐渐受到更多学者的关注，广大研究工作者逐渐摆脱了以往单纯从教学内容的角度来认识课程的局限，趋向于将课程作为一个独立的领域来进行全面而深入的研究，并在课程概念的认识、课程设计、课程实施、课程评价等方面都取得了较为丰富的研究成果．但在学科教育研究中，传统教学论（把课程作为教学论的一个部分）的影响根深蒂固，使得学科的课程研究主要集中于对教学内容的探讨，缺乏从课程的整体观的角度对学科课程的全面研究，教师对课程的认识也较为模糊，在教学中缺乏应有的课程意识．

在课程的相关研究中，课程取向问题至关重要，它是影响整个教育过程的重要因素．所谓课程取向，是指人们对课程的总的看法和认识，是人们综合地运用哲学、心理学以及有关社会、文化等方面问题观点，形成的对课程的总体认识．由于人们的哲学思想、价值观、方法论、文化背景以及对个体的心理发展等方面问题认识上的差异，导致对课程的不同看法，这些不同看法就形成了课程取向[1]．任何一名从事教育的人，无论是理论工作者，还是实践工作者，都有自己的课程取向（只是有些人能意识到，有些人意识不到），它具体表现为在制定有关课程方案或采用具体方法和策略执行课程计划时的某种倾向性．这种倾向既影响课程的设计，也影响课程的具体实施，从而成为左右教育工作者教育行为的主要因素．教师是课程的具体执行者，是课程实施的关键因素，研究教师课程取向的重要性可见一斑．而目前已有的研究，基本上是以整个教师群体作为研究对象来分析他们的课程取向的特点（如文[2]），那么针对具体的某个课程、考查某学科教师的课程取向的情况又会怎样呢，课程取向是否根据学科的不同而有所不同呢？这值得我们进行深入的研究．因此，本文选择初中数学教师为研究对象，以课程取向量表作为研究工具来调查分析初中数学教师对数学课程所持的观点和态度．

2　调查过程与方法

2.1　调查的对象

本研究采用随机抽样的方法来确定问卷调查的对象，从重庆市的初中数学教师中随机抽取140名作为被试，共发放问卷140份，回收135份，剔除废卷获得有效问卷132份，回收率96.4%，有效率98%．

2.2　调查的工具

本研究的调查工具为课程取向问卷，该问卷是在台湾学者黄政杰所著《课程设计》一书中提供的课程取向量表的基础上改编而成的[3]．为使其表述更有利于教师的理解，邀请有关教育学和心理学专家进行了审定，并通过预测修订，以确保问卷的信度和效度．该问卷分为两个部分：一是教师的基本信息（包括性别、教龄、学历、参加培训情况等）；二是55个关于课程取向的测试题项．这些题项分别描述了5种不同的课程取向[4]：（1）认知过程取向—强调学生认知技能的发展，认为学校课程应以教导学生如何学习为目的，学习的内容并不重要，只要能提供学生达到特定的认知过程目标的机会便是有用的，注重培养学生诸如推理、分析和综合、发现问题、解决问题的能力；（2）科技发展取向—尊崇教学效率和体系化的课程设计理念，认为学校课程应致力于寻找有效的手段来达成预设的学习目标，注重培养学生使用信息技术的能力；（3）人文主义取向—强调学生的全面发展和自我实现，认为学校课程应根据学生的兴趣和需要去选择及组织内容，着重培养学生的情意方面；（4）社会重建取向—强调学校课程对社会变革的重要性，将学校课程视为有利于社会变革的工具，以社会的需要和问题作为组织课程内容的中心，注重学生对社会事务的参与，培养学生的社会责任感及解决社会问题的能力；（5）学术理性主义取向—强调课程内容的获得和知识的掌握，主张以学科结构作为课程内容组织的基础，通过选取每一学科的知识精华来促进学生的智力和理性思维的发展．以上各种取向反映了对学校课程问题的一系列的看法，所强调的重点也就有所不同．另外，该问卷的

收稿日期：2007-12-10

基金项目：重庆市教育科学“十一五”规划重点课题——重庆市初中数学教师教学知识的现状分析及对策研究（2006-GJ-026）；重庆市高等教育教学改革研究项目——高等学校职前数学教师教育课程改革的研究与实践（0633097）

作者简介：童莉（1976—），女，四川成都人，重庆师范大学数学与计算机学院讲师，西南大学博士生，主要从事数学课程与教学论研究．

题项采用混编的形式，以克服思维定势带来的前摄效应的影响，如题项 1、7、8、16、21、24、27、31、47、54、55 等11题是用来考查“认知过程取向”的．

2.3 记分与分析方法

在问卷中，每种取向各11题，每个题项的选项只有两种：同意、不同意．如果选择同意就在该题项所代表的取向上计1分，不同意则计0分，从而可以获得各个教师在每种取向上的得分情况，然后采用 SPSS12.0 对所获得的数据进行分析．

3 调查结果及分析

3.1 初中数学教师课程取向的总体水平分析

对所有被试在 5 种课程取向上的得分情况进行描述统计（见表1），结果显示：相对于量表的理论平均分0.5分，初中数学教师的5种课程取向的得分均在平均分以上，其中认知过程取向的得分最高，其次是学术理性和社会重建取向，人文主义和科技发展取向的得分较低．

表1 初中数学教师课程取向的总体水平

	认知过程	科技发展	人文主义	社会重建	学术理性
M	0.91	0.51	0.66	0.80	0.82
SD	0.07	0.18	0.23	0.17	0.13

数据统计结果表明：（1）目前，初中数学教师对认知过程的课程取向高度认同，这与一般教师的课程取向的研究结论一致[2, 5-7]．这说明初中数学教师的课程取向具有与其他学科教师一样的特点，即对认知过程取向的高度认同．究其原因，笔者认为这与新课程改革的关系密切，新课程的实施与推进使得以学生发展为本的课程理念已深入人心，强化了教师的认知过程取向．学生学习数学基础知识与基本技能的过程也是学生学会学习和形成正确价值观念的过程，数学新课程凸显关注过程的观念已被广大教师所接受．（2）初中数学教师虽然高度认同认知过程取向，但并不排斥其它4种取向，其课程取向表现出综合化趋势，这与其他学科教师的课程取向具有共性，也是课程设计的一种国际趋势——强调学科（课程原生性来源）、学生（课程内生性来源）、社会（课程外生性来源）等取向的有机整合．这可能是因为随着新课程改革的推进，教师逐渐认识到虽然每种课程取向的核心要素不同，但它们之间却有非常强的相互联系，任何单一的课程取向都存在自身的局限性，只有多种取向的综合才能起到相互弥补的作用，所以许多教师并不只是持一种取向，开始接受不同取向的合理之处，总是将两种或3种取向混合于实践．（3）初中数学教师在学术理性主义取向上要强于一般的教师，而在人文主义和科技发展取向方面弱于一般教师，这是初中数学教师的课程取向所具有的独特的特点．这可能是由于数学这门学科的本质特征所致．数学是一门演绎的学科，数学具有逻辑的严谨性，数学具有高度的抽象性，这些认识导致人们把数学看成发展学生智力和理性思维的有效工具，从而淡化了对数学人文价值的认识，掩盖了数学与科技发展之间的联系，弱化了对教学效率的关注，从而导致数学教师在课程取向上对人文主义和科技发展取向的忽视．

3.2 教龄和数学研修对初中数学教师的课程取向的影响

不同教龄的初中数学教师在课程取向上是否存在着差异呢？为此，本研究对所收集的数据进行了单因素方差分析，将教师的教龄分为5种类型来考查教龄对教师课程取向的影响，结果如表2所示．从表中可以看出，不同教龄的初中数学教师在科技发展和学术理性取向上具有较为显著的差异，而在认知过程、人文主义和社会重建取向上没有显著差异．通过 LSD 的多重比较得知：科技发展取向在 11~20 年教龄的教师身上表现得尤为突出，与 1~5 年、6~10 年教龄的教师相比，差异极为显著；学术理性取向具有随着教龄的增加而越来越突出的趋势，在16年以上教龄的初中数学教师身上表现得尤为突出．

表2 不同教龄初中数学教师课程取向的方差分析

	认知过程	科技发展	人文主义	社会重建	学术理性
1~5(a) *M(SD)*	0.91(0.07)	0.50(0.14)	0.70(0.27)	0.82(0.21)	0.73(0.12)
6~10(b) *M(SD)*	0.90(0.07)	0.49(0.21)	0.75(0.24)	0.81(0.16)	0.75(0.11)
11~15(c) *M(SD)*	0.93(0.07)	0.54(0.21)	0.64(0.23)	0.86(0.15)	0.86(0.12)
16~20(d) *M(SD)*	0.89(0.09)	0.56(0.19)	0.53(0.07)	0.73(0.20)	0.94(0.05)
20~ (e) *M(SD)*	0.86(0.05)	0.48(0.29)	0.55(0.23)	0.66(0.16)	0.95(0.05)
F	0.87	7.51**	1.37	1.30	7.05**
Post Hoc		X			Y

注：（1）表中*表示 $P<0.05$，**表示 $P<0.01$，***表示 $P<0.001$，（下同）；（2）表中 X 表示的内容为：a<c***，b<c**，a<d**，b<d*，a<e**，b<e；Y 表示的内容为：a<c**，b<c*，a<d**，b<d**，a<e*，b<e**．

这些结果表明：（1）教龄对初中数学教师的科技发展和学术理性取向具有显著的影响，并随着教龄的增加，这两种取向表现得尤为明显．究其原因，一种可能的解释是，在学术理性取向上，老教师由于受传统数学教育的影响，比新教师更关注数学知识的学科体系，强调数学的逻辑严谨性，强调数学思维训练的作用．在科技发展取向上虽然各教龄段的得分都不高，但也表现出了明显的差异，这说明老教师比新教师更加关注数学教学的有效性，积极采用有效的手段来达成预设的学习目标．

（2）不同教龄的初中数学教师在认知过程、人文主义和社会重建取向上没有显著差异．其中，在认知过程取向上的得分都较高，这说明这一理念已被广大数学教师所接受，从而在各教龄段没有显著差异，认同度都很高，这与前面总体水平分析的结论一致；在人文主义取向上的无差异表明在数学教育中，教师普遍关注数学的工具性、实用性，而导致各教龄段的教师对数学的人文性认识的丧失；在社会重建取向上的得分也较高，特别是新教师更加倾向于从社会的角度来阐释对人的培养，这可能是因为年青人普遍具有改造社会的

理想和抱负，而新课程改革为他们的理想与抱负的实现提供了可能，因而在课程取向上将课程作为进行社会变革的工具，想通过课程来实现对社会的改造.

（3）在各课程取向上，11~15年教龄的初中数学教师与10年内教龄的教师具有明显的差异，这说明数学教师达到专业成熟期大概需要10年左右的时间来积累教学经验，实践教学理论，这也佐证了大部分研究都倾向于把教龄10年以上的教师作为熟练型教师.

另外，在初中数学教师的教学生涯中，教学研修的情况会不会造成对其课程取向的影响？从表3进行的数据方差分析的结果可以看出，教师参加教学研修的情况对人文主义取向的影响极其显著，对认知过程取向的影响显著，并且可以看出不常参加的教师与常参加各种研修的教师在课程取向上具有显著差异. 可见，现有的数学教学研修致力于学生认知技能的发展，致力于数学人文性的彰显，但是我们不得不面对的一个现实是：要建立数学教师的人文主义取向还需要一个逐渐认同的过程.

表3　教学研修对初中数学教师课程取向影响的方差分析

	认知过程	科技发展	人文主义	社会重建	学术理性
不常参加(a) M(SD)	0.86(0.07)	0.53(0.19)	0.43(0.14)	0.73(0.18)	0.88(0.12)
自发组织(b) M(SD)	0.92(0.08)	0.45(0.19)	0.76(0.15)	0.77(0.19)	0.83(0.13)
学科教研(c) M(SD)	0.92(0.05)	0.52(0.21)	0.77(0.18)	0.86(0.13)	0.77(0.12)
学校教研(d) M(SD)	0.94(0.07)	0.59(0.10)	0.79(0.25)	0.91(0.14)	0.76(0.16)
F	2.88*	0.80	12.68***	2.42	2.26
Post Hoc	X		Y		

注：表中X表示的内容为：a<b**，a<c**，a<d**；Y表示的内容为：a<b***，a<c***，a<d***.

3.3　新课程培训对初中数学教师的课程取向的影响分析

表4显示，不同新课程培训状况的初中数学教师在学术理性上具有极其显著的差异，在人文主义取向上具有较为显著的差异，在社会重建取向上具有显著差异，而在认知过程和科技发展取向上没有显著差异.

表4　初中数学教师课程取向的方差分析

	认知过程	科技发展	人文主义	社会重建	学术理性
不常参加(a) M(SD)	0.88(0.07)	0.57(0.14)	0.52(0.07)	0.70(0.17)	0.93(0.07)
1~2次(b) M(SD)	0.91(0.07)	0.54(0.16)	0.63(0.15)	0.80(0.16)	0.85(0.11)
3~次(c) M(SD)	0.91(0.08)	0.42(0.23)	0.80(0.18)	0.88(0.15)	0.67(0.08)
F	0.63	2.28	10.22**	3.64*	23.91***
Post Hoc			X	a<c*	Y

注：表中X表示的内容为：a<b*，a<c***，b<c**；Y表示的内容为：a>b*，a>c***，b>c***.

从以上结果可以看出：（1）在学术理性取向方面，从未参加过新课程培训的教师与参加过培训的教师相比，更加认同这一取向，并且随着培训次数的增加，该取向的支持率显著下降. 这种状况说明新课程改革对于以往教师过于注重学术理性的倾向进行了适当的反思与检讨，提醒教师注重激发学生的兴趣，不要只看重数学的形式化、抽象性和严谨性. 从而使新课程培训遵从新课程改革的理念，弱化了教师对学术理性的认同，但我们要防止培训的片面性带来的负面影响，使新的数学课程走向传统数学教育的另一个极端.（2）在人文主义取向方面，参加过3次及以上培训的教师对该取向的认同度与未参加过培训的教师具有极为显著的差异，随着培训次数的增加，该取向的支持率明显增加，可见，新课程培训使得人们正在逐渐接受这一观念.（3）在社会重建取向方面的显著差异表明，新课程培训促使初中数学教师更加自觉地把数学与社会联系起来，主张用数学去解决社会生活中的诸多问题，这是符合新课程改革的理念的.

3.4　学历对初中数学教师课程取向的影响分析

初中数学教师所接受的职前教师教育是否对其课程取向产生影响？本研究采用单因素方差分析的方法分析了初中数学教师所获得的第一学历与其课程取向的关系，结果（见表5）显示，不同的学历除了在科技发展取向上有较为显著的差异之外，在其余的各取向均无显著性差异. 可见，数学教育现行的各种教育机制对未来教师的课程取向形成的影响是非常小的，这使我们不得不深思当前职前数学教师教育的状况.

表5　不同学历初中数学教师课程取向的方差分析

	认知过程	科技发展	人文主义	社会重建	学术理性
研究生(a) M(SD)	0.90(0.06)	0.59(0.19)	0.68(0.15)	0.76(0.15)	0.84(0.09)
本科(b) M(SD)	0.92(0.07)	0.55(0.15)	0.66(0.25)	0.80(0.17)	0.83(0.15)
专科以下(c) M(SD)	0.89(0.08)	0.39(0.19)	0.66(0.26)	0.82(0.20)	0.80(0.12)
F	0.78	5.02**	0.04	0.25	0.36
Post Hoc		X			

注：表中X表示的内容为：a>c*，b>c**.

4　几点思考

通过以上对初中数学教师课程取向的调查与分析，我们可以看出，初中数学教师与其他教师在课程取向上具有一定的共性，也具有自身的个性，正是有这些个性的存在，才使得我们认清数学教育的优势与不足，引发我们的深入思考.

思考一：关于职前数学教师教育. 通过以上关于学历对初中数学教师课程取向的影响分析可以看出，我们目前的职前数学教师教育，包括研究生教育，对未来教师的课程取向形成的影响不显著，课程设置主要表现为对数学学科知识的重视，而忽视了对未来教师数学课程观的塑造，导致其缺乏关于数学课程能教什么、为什么教、如何教、教给谁、何时教等学科教学知识，客观上造成了教学的盲目性. 因此，职前数学教师课程观的塑造、学科教学知识的发展是今后数学

教师教育有待加强的方面[8].

思考二：关于数学教师的职后培训．虽然数学教师的职后培训必不可少，特别是对数学新课程的培训是新课程能否有效实施的关键所在，但我们也要防止培训的片面化和形而上学化．应真正领悟新课程的精神，既要注重新课程理论知识的学习，也要注重隐性的教育观念、合理的课程取向的形成；既要注重数学的实用性、工具性，也要注重数学的人文性；既要注重教师对数学知识的深刻理解，又要注重对数学知识的有效表达，促使数学教学效率的提高，这是提高数学教学质量的关键[9]．因此，我们应有针对性地开展校本培训，引导教师自我增进一般科学素养与人文修养，形成和发展数学品质及教育教学品质，从而提高职后数学教师培训的质量．

思考三：关于数学教师的专业成长．要实现教师的专业发展，教师在教学生涯中的同伴互助、专业共同体的引领是极为必要的[10]．研究表明，教师的课程取向的形成与其参加教学研修的状况的关系紧密，应积极发展学校和学科的教学研修组织，也需要鼓励教师开展自发组织的教学讨论，使教师在讨论交流教育经验中了解自己的课程取向，有意识地改变某些不恰当的取向，建立适合于社会发展需要的、与当时当地的客观条件相适应的课程取向，促使新手教师向专家型教师的成长，这是数学教师专业成长的重要途径之一．

[参 考 文 献]

[1] 马云鹏．国外关于课程取向的研究及对我们的启示[J]．外国教育研究，1998，(3)：38–43.

[2] 靳玉乐，罗生全．中小学教师的课程取向及其特点[J]．课程·教材·教法，2007，(4)：3–10.

[3] 黄政杰．课程设计[M]．台北：东华书局，1999.

[4] Print. Curriculum Development and Design [M]. NSW: Allen & Unwin, 1993.

[5] 吴本韩，张善培．师训学员对小学科学课程取向的信念[J]．教育曙光，2002，(45)：42–53.

[6] Cheung D, Ng P H. Science Teachers' Beliefs about Curriculum Design [J]. Research in Science Education, 2001, 30(4): 357–375.

[7] Cunningham R, Johnson J M, Carlson S. Curriculum Orientations of Home Economics Teachers [R]. American Vocational Association Convention, St.Louis, Missouri, 1992.

[8] 田宏根，杨军．从一节课管窥高中数学教师教学知识的发展[J]．数学教育学报，2007，16 (2)：51–54.

[9] 王光明．重视数学教学效率 提高数学教学质量[J]．数学教育学报，2005，14 (3)：43–46.

[10] 康世刚，吕世虎．数学教研组在数学教师专业化成长中的作用及对策[J]．数学教育学报，2005，14 (1)：89–91.

Investigation and Analysis of the Junior Middle School Mathematics Teachers' Curriculum Orientation

TONG Li[1, 2]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China;
2. College of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: The curriculum orientation was a guidance of the curriculum design and curriculum implementation. The junior middle school teachers' curriculum orientation straightly influenced on their teaching design, method and strategy, and affected their teaching behavior. The junior middle school teachers' curriculum orientation had the integrative trend, in the trend, the teacher strongly believed in the cognitive process orientation, and more strongly believed in the academic rationalism and the social reconstruction orientation, but little believed in the humanism orientation, scientific and technological development orientation; there were statistically significant differences among those who had different years of teaching experience in academic rationalism orientation, scientific and technological development orientation; there were statistically significant differences among those who had different the experience of the researching on teaching in the cognitive process and the humanism orientation. The state of the new curriculum training strongly influenced on the orientation of academic rationalism, social reconstruction and humanism; but there were not statistically significant differences among those who were with different academic degree.

Key words: the curriculum orientation; the mathematics teacher; the professional development

[责任编校：陈汉君]

第17卷第2期 数学教育学报 Vol.17, No.2
2008年4月 JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION Apr., 2008

基于“教学用问题”的“新手—熟手—专家”型数学教师课堂教学的对比研究

郭桂华[1]，宋晓平[2]

（1．江苏省扬中高级中学，江苏 扬中 212200；2．江苏大学 理学院，江苏 镇江 212013）

摘要：以“教学用问题”为分析工具，对相同教学内容，3类教师在数学课堂教学中的表现为：对教材的处理是基于教材，而高于教材；教学用问题的使用存在根本的差异；NT和PT对“元认知”的相关理论和“元认知提示性问题”的使用策略缺少认识；NT更倾向于在巩固中讲授，PT是在引导中逐步建构学生对概念的理解．教学用问题的综合性的使用是保证高效率数学教学的前提条件．

关键词：教学用问题；新手型教师；熟手型教师；专家型教师

中图分类号：G632.4 **文献标识码**：A **文章编号**：1004-9894（2008）02-0051-04

1 研究的背景

1.1 寻找数学教师专业成长的有效途径

教师的专业发展是教师成长研究中的重要课题，从20世纪70年代以来已有不少国内外学者对此进行了理论与实践的探索，并取得了一些显著的成果．教师成长过程，是一个由新手型教师向专家型教师转变过程，研究的目的在于找出新手型教师与专家型教师之间的差别，确定在教学领域专家所需的“因素”，明确新手型教师向专家型教师转变的规律，从而为师资培训提供科学依据，尽可能缩短新手型教师的成长周期，使之尽快成为专家型教师[1]．对于教师发展的阶段，国外学者将教师的成长划分为5个阶段：新手阶段（Novice Level）、高级新手阶段（Advanced Level）、胜任阶段（Competent Level）、熟练阶段（Proficient Level）、专家阶段（Expert Level）[2]．我国学者把教师的专业发展划分成3个阶段：新手阶段、熟手阶段和专家阶段[3]．本研究采用国内学者的划分，将专业成长3个阶段的教师称为新手型教师、熟手型教师和专家型教师．新手—熟手—专家型教师，在课堂教学的各阶段，他们各有什么样的教学特点？这些特点与课前预设和课后反思之间是怎样的关系？他们对数学教学是怎样认识的？这些问题将是本研究要探讨的．

1.2 探索以校本教研为主的数学教师专业成长的课题研究

教师在职阶段的专业成长，其核心就是获得产生于复杂和不确定性情境过程的实践性知识，尤其要面对的是如何把那些明确的知识付诸教学实践的过程[4]．从3类教师外显的教学行为，即“教学用问题”，考察他们使用“教学用问题”的差异．这样有利于同事之间互相指导，从课堂内部探索校本教研的课题．

数学课堂中，教师为开展有效教学活动，创设促进学生积极思维的学习情境，进一步发展学生数学思维能力而提出的问题的总和称为“教学用问题”[5]．“教学用问题”是实现教学目标的手段，是以教师提问的形式呈现的．通过课堂观察和对教学录像带的分析，我们发现数学课堂教学中教师的提问既可以作为目的，也可以作为手段．作为目的体现在教师提出的问题能否有效地激发学生提出问题和积极思考．作为手段在课堂教学中具有“双刃剑”的作用：首先，教师用问题驱动学生回顾复习旧知识，通过精心设计问题情境（可以是现实的、模拟现实的或数学的），凸现“原有知识无法解决情境中的问题”，把提出的问题作为实现教学目的的手段；其次，通过教师的引导性问题激发学生探究思路的出现，把学生从模糊状态的思维活动中逐步引导出来，并指向清晰的解决问题的方向．“教学用问题”包括：

元认知性问题（即元认知提示语）：教师的提问不是直接针对问题本身，通过提问，唤起学生调节自己的思维策略，自主生成对问题的探究，实施自我监控．提出的问题起一种向导性的作用，引导学生探索问题的解决思路．

开放性问题：需要学生多方向思维，多角度、深层次地思考问题．

导向性问题：需要学生启动自己的思维指向问题解决的目标，具有导向性，是教师指向目标，也是一种启发性提问，教师回答也可以学生回答或不回答．

理解性问题：需要运用所学的知识，进行复杂或简单地

收稿日期：2008-01-16

基金项目：江苏省教育科学“十一五”规划课题（D/2006/01/163）；江苏大学教学改革项目——新课程背景下数学教师培养中实践环节的探索性研究（JGY2007054）

作者简介：郭桂华（1957—），男，江苏扬中人，特级教师，主要从事数学教师专业发展的理论与实践研究．

推理做出对问题说明或简单的论证.

唤起性问题：通过学生的回答，判断学生是否掌握了所学的知识.

判断性问题：学生用“对与不对”以及“是什么”的简短回答，主要用来对简单的概念性知识、定理或法则的辨析和判断事实.

“教学用问题”的系列组合构成“教学用问题链”（简称“问题链”）. 问题链是教学用问题的结构性描述. 任何数学课堂教学都是要达到一定目标的教学，学生的学习是一种指向目标的学习，学生的活动是一种指向目标的活动，不是漫无边际的学习. 从一种模糊的思维状态到清晰思路的形成，仅仅依靠单一的问题和无关联的多个问题是不可能达到目标的. 指向目标的问题是要有一定结构的，这种结构就是问题链. 教学用问题和问题链不但启发学生的思维活动，而且保证思维的目标性和合理性.

2 方法

2.1 研究对象的选择

我们研究3位数学教师，即新手型教师、熟手型教师和专家型教师. 通过讲授同一节“任意角的三角函数”来分析3类教师的教学特点. 3种类型的教师是根据如下标准来确定的：

新手型数学教师（Novice Teacher，简称NT），本研究选取大学本科，数学专业毕业，刚走上工作岗位1年的教师.

熟手型数学教师（Proficient Teacher，简称PT），指从教5年以上，拥有较丰富的教学知识和经验的教师. 本研究确定，大学本科，数学专业毕业，中学一级教师，从事高中数学教学6年的数学教师，她参加过市级骨干教师培训和课题研究.

专家型数学教师（Expert Teacher，简称ET），依据两个标准：首先是学校和教育主管部门认可的；其次是教龄在10年以上的中学高级教师，获得过市级以上奖励，主持过与教学相关的研究课题的教师.

为尊重提供案例的教师和研究的需要，隐去教师的真实姓名，把新手型数学教师、熟手型数学教师和专家型数学教师分别简称为：NT、PT和ET.

2.2 研究方法和材料

2.2.1 研究方法

本研究的基本设计思路是“个案比较研究”，从比较的角度分析3个教学个案. 具体的策略是：首先从教学现象方面寻找3堂课的相同与不同之处，试图分析产生不同的原因. 例如从数学教师专业成长分析“不同类型的教师在教学用问题方面的差异，根据对3位教师的进一步的座谈更深层次地分析产生差异的内在原因”. 在进行案例设计时考虑到可比性，3位教师授课班级的学生是在同一个年级中经过筛选最后确定的，可以说在学生方面不存在差异.

本研究主要采用录像带分析方法. 用到两个具体的方法：（1）逐字记录分析. 对各个课堂录像进行了文本整理，把课堂中教师和学生的语言转化成文字，它是未经“加工”的原始语言的表现形式，然后在文字记录的基础上，进行教师与学生的对话分析、提问分析、回馈分析、结构性陈述分析.（2）时间标记分析. 对于教师和学生在课堂中的教学对话或教学片段，采用标记时间刻度的方法，然后根据分类的内容计算时间比例. 比如，按照教学流程分类，可利用时间标记计算出各个环节所用时间.

2.2.2 研究过程

本研究是在对已有研究成果分析的基础上，锁定3种类型的数学教师，选取相同的课程，拍摄教学录像，在课后与上课教师进行单独的访谈，课后共同观看教学录像，开展面对面集体的座谈（参加人员：研究人员和上课教师），全面了解设计的思路与课后的反思. 在此基础上，分析3种类型教师在教与学流程、教学用问题的使用之间存在的差异，进而讨论新手型教师—熟手型教师—专家型教师各自的教学特点，提出基于校本教研的数学教师专业成长的建议.

3 研究的结果

3.1 关于“教学用问题”的对比分析

3类教师提出问题的数量与类型情况如表1.

表1 三类教师提出问题的数量与类型对比表（%）

	NT		PT		ET	
	频次	百分比	频次	百分比	频次	百分比
元认知性问题					1	1.6
开放性问题					1	1.6
导向性问题			5	10	9	14.5
理解性问题	11	39.3	13	26	10	16.1
唤起性问题	5	17.8	7	14	9	14.5
判断性问题	12	42.9	25	50	32	51.7
合计	28	100.0	50	100	62	100.0

从提出问题类型可以看出教师所使用的教学策略，是以“预设”为目标，还是以学生“自主建构”为目标的教学. 从总体上对比教学用问题我们可以看到：

首先，NT和PT对“元认知”的相关理论和“元认知提示性问题”的使用策略缺少认识. NT和PT均未提出“元认知性问题”，在教学设计的访谈中，3位教师在教学设计中都关注此类问题，但在具体的教学中NT和PT并没有出

现，而 ET 是以问题——"大家发现了什么没有？"这个元认知提示和一个开放性问题——"看看是什么关系？"来启发学生继续思考，发现正切与余切、正弦与余割、余弦与正割之间关系的．

NT 和 PT 都意识到"元认知提示性问题"的作用，但在使用策略上都是欠缺的，从"意识"到"使用"需要专家的引领和同行之间的交流．在后期座谈中，3 类教师共同观看教学录像，面对面地交流所想．正如 NT 所说：经过对比才知道与 PT 和 ET 在教学过程中的提问是存在差异的，微观教学的分析对自己改进教学方式是有帮助的．

其次，NT 更倾向于在巩固中讲授，PT 是在引导中逐步建构学生对概念的理解．NT 的"理解性问题"和"判断性问题"占到了 80%以上，"小步骤，快节奏"，不断地检测学生是否掌握所学的知识．而"导向性问题"和"开放性问题"都没有，整节课基本上是在教师的讲授中完成的．PT 是"导向性问题"、"理解性问题"和"唤起性问题"的配合使用，课堂显现得更加自然．

在座谈中，PT 认为：数学教学要培养和发展学生的数学思维，课堂中要使学生的思维不断地跟紧教师的思维，所以采用了"小步骤，快节奏"的策略．在与 ET 的教学过程对比后，发现留给学生独立思考的时间过少，学生有"来不及想"的情况．

从教学用问题的角度来看，PT 的问题链引导性强，启发性弱，在时间等待策略上不及 ET．原因是，ET 的问题链具有启发性，是在启发中引导．

第三，"教学用问题"综合性地使用是保证高效率教学的前提条件．ET 综合地使用教学用问题，以元认知提示性问题促进思维的启动，启发学习的生成；以开放性问题促进学生多角度地考虑问题，保证思维发散性；以导向性问题趋向目标，促进思维的维持．

3.2 关于教学整体结构的设计

3.2.1 教学流程的对比分析

3 种类型教师，针对同样的教学内容表现出了不同的处理方式，下面从微观和宏观两个层面分析各自的教学特点．(教学流程见图 1 至图 3)

(1) NT 的教学流程．

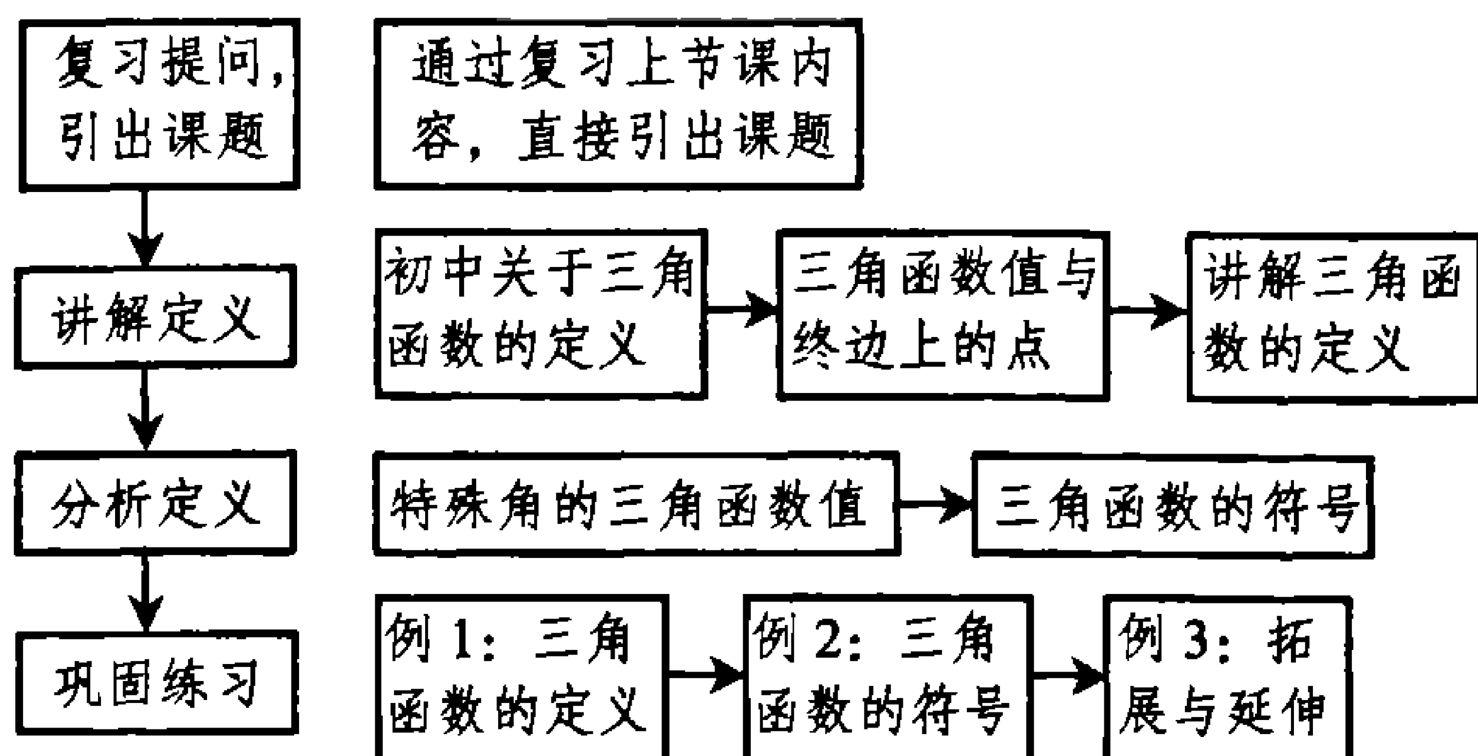


图 1　NT 的教学流程

(2) PT 的教学流程．

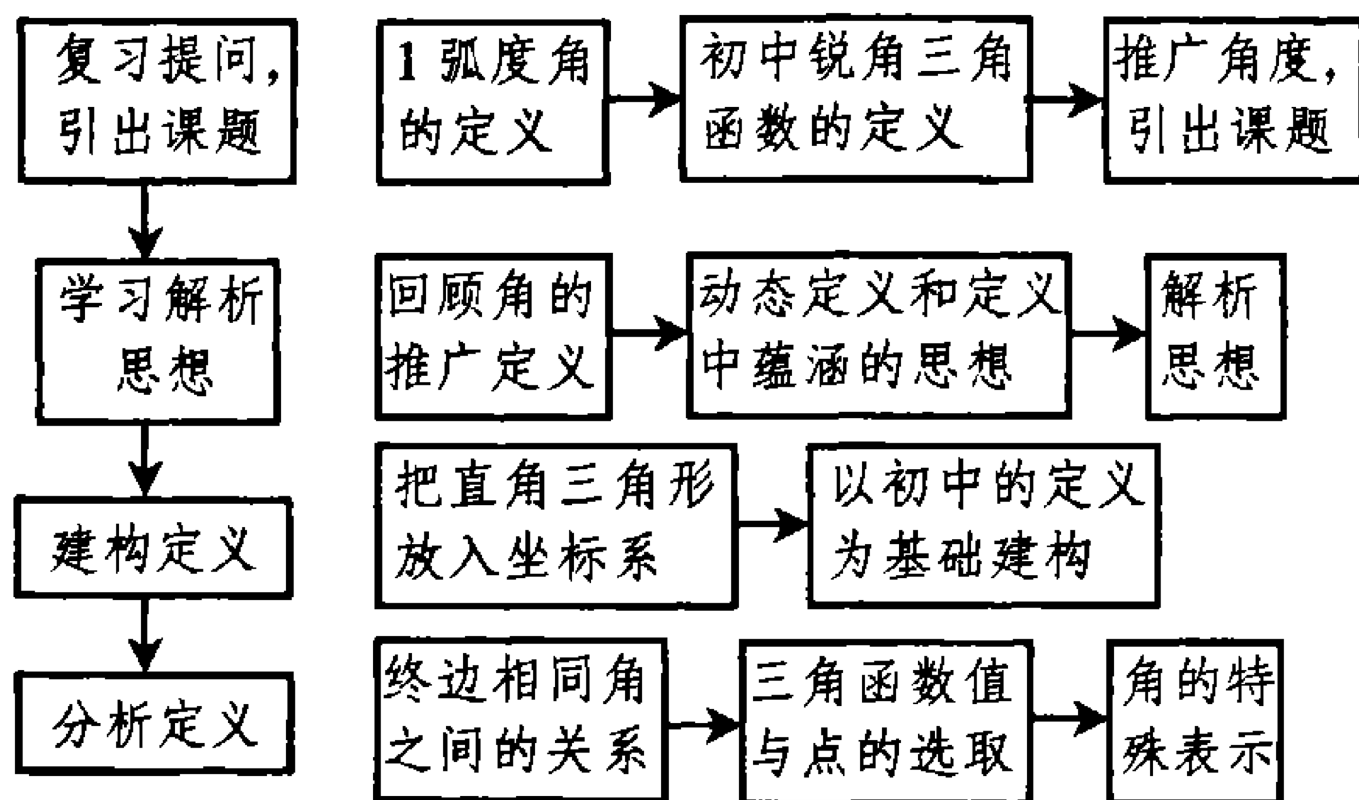


图 2　PT 的教学流程

(3) ET 的教学流程．

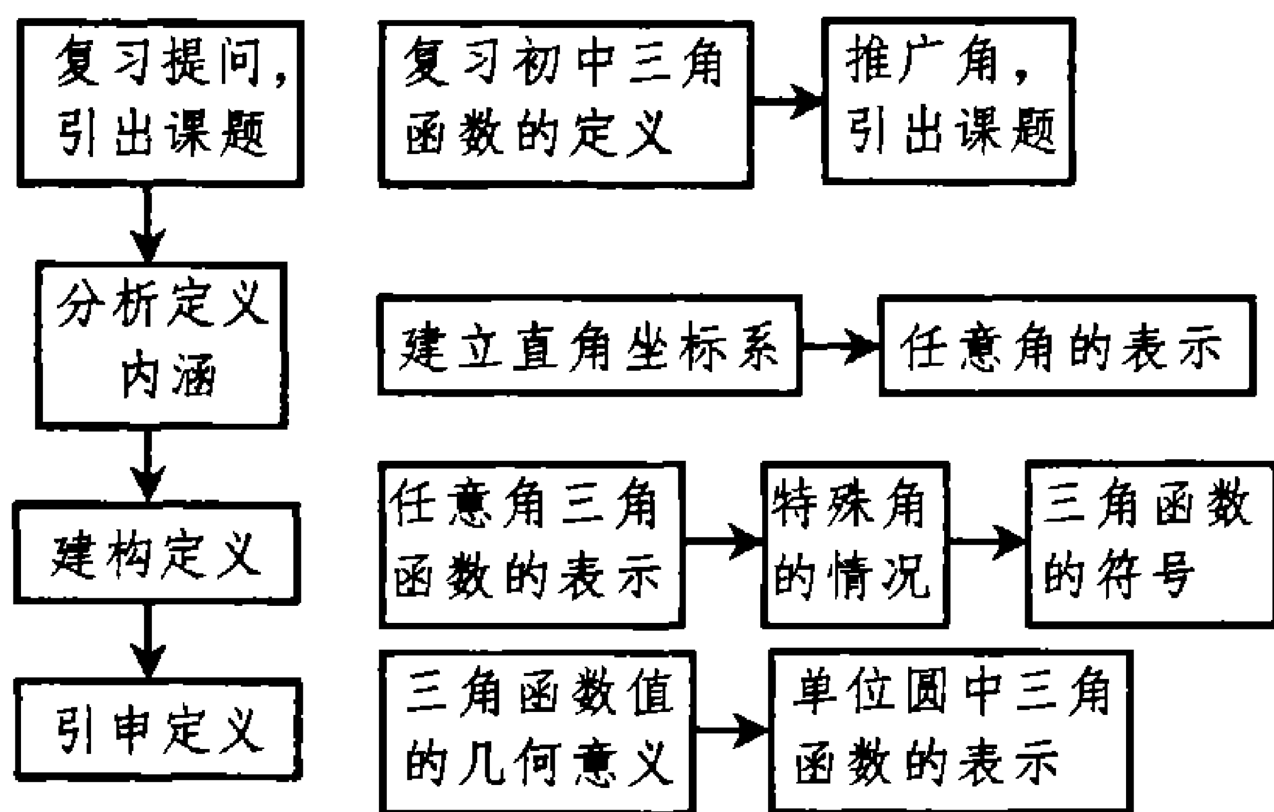


图 3　ET 的教学流程

3.2.2 复习提问引出课题的比较

NT 是直接给出课题，将角直接放入坐标系，讲解三角函数的定义；PT 是通过推广角，通过提出问题，在学生独自解决问题中，建立坐标系，在学生主动建构知识的基础上逐步地学习三角函数的概念；ET 是通过回顾解析思想方法，回顾动态的三角函数定义，在此基础上逐步建构三角函数概念．

3.2.3 定义的讲解比较

在访谈中，3 位教师都谈到在复习锐角三角函数定义的基础上，过渡到任意角的三角函数，从形式上看是一样的，但在具体的教学过程中却是完全不同的．NT 以教师的"讲"为主，直接把一个直角三角形放入直角坐标系中；PT 通过提出问题："如何建立直角坐标系？"师生共同完成建立坐标系的过程；ET 则是提出两个问题："定义任意角三角函数，把角放在什么中？""如何放？"从方法上启迪学生．

3.2.4 定义分析的比较

NT 先讲定义，然后讲解终边上的点的选取与函数值无关的特点，以及对角的特殊情况的分析．这是大多数讲解定义的方法（先定义，再分析）．PT 则是在给出定义之前将前面的两个内容进行了详细分析，而后归纳出定义．ET 教学顺序虽与 NT 相同，但在定义分析中是通过 3 个问题：α 角的始边在 x 轴的非负轴上，α 角终边所处的位置能否反应该角的大小？α 角的三角函数与点 P 的选取有什么关系？当

$\alpha=\pi/2+k\pi$ 时，此时 $\tan\alpha$，$\sec\alpha$ 有无意义？当 $\alpha=k\pi$ 时，此时 $\cot\alpha$，$\csc\alpha$ 有无意义？这样使教学的层次非常清晰地表述了三角函数定义中需要注意的问题.

另外，通过分析教学录像，可以看到3位教师在教材的处理方面都是“基于课标，活用教材，不拘泥于教材，高于教材”的处理方式，都遵循“将锐角三角函数推广到任意角”的思路，区别在于 3 类教师在处理方式上是不同的（如 3 个流程图).

通过对 3 类教师教学过程的宏观与微观的分析可以看出：专家型教师更擅长用“问题”来驱动教学，通过合理的问题设置，启发学生的思维，并用问题来维持学生的思维活动；新手型教师所使用的问题主要关注对学生已学习知识的掌握和理解，对启发和引导学生指向目标的学习，以及维持学生思维活动显得不足；熟手型教师在教学设计中虽关注启发引导，但在具体的实施中显现出问题搭配的“欠缺”．因此，教师课堂教学中不但要关注提出一定数量的问题来启发引导学生,还应研究问题的结构——问题链，有效的问题链是有效教学的基本保障，更是培养学生积极思维的关键.

4 进一步思考的问题

任何一个成功的教师，专业成长中都要从新手开始，经过熟手阶段，最后成为专家型教师．教师专业成长的研究应当依托校本教研，扎根课堂，开展课例研究，为教师成长提供现实的素材．本研究仅仅是开始，选取的素材也只是一个个案的分析，一些结论只是一家之言．目前，我们正在计划跟踪研究3类教师在一个阶段的教学对比,同时扩大研究数量，开展多节课的3类教师的对比教学研究.

[参 考 文 献]

[1] 连榕，孟迎芳．专家——新手型教师研究述评[J]．福建社会主义学院学报，2001，(4)：20–22.

[2] 曾玉华，金华．专家型教师的职业素质结构[J]．教书育人，2003，(7)：37–38.

[3] 廖美玲，连榕．新手—熟手—专家型教师成就目标定向与人格特征的研究[J]．应用心理学，2002，8 (4)：41–46.

[4] 顾泠沅，杨玉东．教师专业发展的校本行动研究[J]．教育发展研究，2003，(6)：1–7.

[5] 宋晓平，王建华．数学课堂学习动力与“教学用问题”研究[J]．数学教育学报，2006，15 (3)：19–23.

Contrast Study on “Problem-using Teaching” in Mathematics Classroom between “Novice – Practitioner – Expert” Teachers

GUO Gui-hua[1], SONG Xiao-ping[2]

(1. Yangzhong Middle School, Jiangsu Yangzhong 212200, China;

2. Faculty of Science, Jiangsu University, Jiangsu Zhenjiang 212013, China)

Abstract: Based on the “problem-using teaching”, we studied the teaching procedure of three kind teachers. In this research, their teaching materials were same to each other. Our study showed that: their treatments were based on the textbook and surpass the textbook to some extent; but their “problem-using teaching” were totally different; NT and PT knew little about melcognitive theories and melcognitive-hinting strategy; NT preferred to teaching together with exercise, while PT using guidance gradually to build students’ understanding of concepts. Then we came to a conclusion that integrated using of “problem-using teaching” was the prerequisite to high efficiency of teaching.

Key words: problem-using teaching; novice teacher; practitioner teacher; expert teacher

[责任编校：陈汉君]

第17卷第2期
2008年4月
数学教育学报
JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION
Vol.17, No.2
Apr., 2008

数学素质教育评价的理性思考
——兼作"素质教育与数学考试"争鸣之回音

石循忠，郑正亚

（湖南科技学院 数学与计算科学系，湖南 永州 425100）

摘要：素质教育与数学考试的关系是数学素质教育评价的敏感问题．新课程倡导的发展性评价受到了考试成绩这一现实指标的挑战，素质教育应该正确对待数学考试，在"素质教育—考试成绩—素质教育—考试成绩"这一循环过程中，把握素质教育与数学考试的关系．近几年高考数学命题改革，注重评价学生的学习过程、数学能力和个性品质，在很大程度上测试了学生的素质水平，因此，考试命题科学化是促进素质教育良性循环的关键．

关键词：素质教育；课程评价；数学考试；考试命题

中图分类号：G423.04　**文献标识码：**A　**文章编号：**1004-9894（2008）02-0055-03

自《数学教育学报》登载"数学素质教育是提高学生数学考试水平的关键"一文[1]以来，陈骏、吴绍兵两位老师先后分别撰文[2-3]发表不同意见，素质教育与数学考试的关系问题引起了较为激烈的争鸣，可见素质教育与数学考试的关系是数学素质教育评价的敏感问题．我们觉得有必要谈谈对这一问题的进一步认识，并以此作为争鸣的回音．

1 素质教育发展性评价的困惑

文[2]提出，"对于学生素质教育的评价通过数学考试是不可能实现的"，强调"发展性评价"，"而并非我们现在通过考试而采取的终结性评价"．倡导发展性评价，显然是当时基础教育新课程的评价理念（文[2]刊出之时正值新课程刚刚起步），如果说基础教育课程改革是实施素质教育的有效途径，那么，发展性评价就是素质教育评价的一种新举措．具体而言，数学新课程强调"对数学学习的评价要关注学习结果，更要关注他们的学习过程；要关注他们在数学活动中所表现出来的情感与态度，帮助学生认识自我，建立信心"[4]．在评价方式上，数学新课程试图改变以往过于追求量化评价的状况，极力倡导质性评价，于是，作为质性评价的主要形式——成长记录袋（档案袋）评价，倍受数学课程研究者的青睐．

新的评价理念以人为本，关注学生的全面发展，无疑代表着数学教育评价先进观念的前进方向．然而新课程实验区的情况又如何呢？实验学校竞先筹建各具特色的学生成长记录评价体系，档案袋评价立即成为数学学习评价的时尚方式．但具体操作起来，遇到的问题还不少，如档案袋材料的种类、数量标准怎么界定，如何利用成长记录对学生的数学学习进行恰当的评价，尤其是如何对材料赋予权重，与数学考试成绩相配合等．加上班级人数过多，教师负担加重，教师素质跟不上等客观原因，档案袋评价的推进步履艰难．

再来看看中学教育评价的实际．目前评价一所学校，一位教师，一个学生，考试成绩（尤其是高考和中考）无疑是最重要的（甚至是唯一的）指标，各学校的竞争自然就成了学生考试水平的竞争．尽管随着高校的逐年扩招，大学入学率已经达到"大众化"水平，升学压力有所减缓，但重点大学，热门专业的竞争有增无减，毫不逊色．无论课程改革实施得怎样，素质教育推进得如何，按照世俗的眼光，最终还得看学生考试成绩的好坏．不是吗？基础教育课程改革某国家级实验区实施新课程3年下来，首届初中毕业生虽然参与了实验区贯彻发展性评价精神而组织的测试，但不参加全市的统一考试，结果出现了重点高中不愿招收实验区初中毕业生的尴尬局面．无独有偶，某城市坚持搞素质教育，推进发展性教育评价，高中毕业生参加当年高考，与省内其它城市相比，成绩有些滑坡，在社会舆论的压力下，该城市教育部门由衷地发出"素质教育已经走到了十字路口"的感叹．

2 素质教育与考试关系的再分析

如上所述，实施素质教育如果在高考（中考）上没有优势，那就很难得到社会的认可和肯定．具体说来，数学素质教育试图绕过数学考试这一关口，"并非直接提高考试水平"，肯定不会受到社会的好评．也就是说，目前数学素质教育水平只有通过数学考试来评价，这样，提高数学考试成绩自然成为数学素质教育的近期目标．谈到这里，我们已涉及到数学素质教育评价的敏感问题．

关于素质教育与数学考试关系争鸣的焦点是何为目的、何为手段的问题．文[1]提出"暂且把应付考试当作目标，

收稿日期：2007-11-20
基金项目：湖南省普通高校教学改革研究项目——面向新农村的中学教师培训模式整合研究（湘教通[2006]171号）
作者简介：石循忠（1966—），男，湖南宁远人，教授，主要从事数学课程与教学论研究．

而将素质教育作为应付考试的手段”，遭到陈骏、吴绍兵两位老师的一致反对，文[2]质问“数学教育为了什么”，认为文[1]的观点“容易使人造成素质教育为了考试，素质教育等同于考试教育”；文[3]明确提出文[1]的提出不妥，并接着说“如果把考试当作目的，素质教育当作应付考试的手段，则素质教育只能是换了名称的应试教育”．对于这一焦点问题，有必要作一些分析．

由应试教育向素质教育转轨，这不是一朝一日就可以达到的，而必须经过漫长的时间和极大努力才能实现．尽管素质教育的口号喊了多年，官方也对素质教育作了正式的界定，但素质教育的实施远远没有达到其理想的状况，目前尚处于“初级阶段”．文[3]也提出，“如果数学素质教育不是提高考试水平的关键，并非直接提高考试水平，那么素质教育自然不会有什么市场．应试教育向素质教育的转轨也不可能成功，即使强扭过去也会反弹回来”，这不正好说明了素质教育尚处于“初级阶段”吗？在“目前整个社会高度关注高考的情况下，用素质教育的方法提高考试水平，是实施素质教育的切入点”．把素质教育作为方法来提高考试水平，这一观点不是正好与文[1]的说法相吻合吗？

由此看来，素质教育与数学考试何为手段、何为目的，不能只停留在静态的分析上，而应从发展的眼光，在“素质教育—考试成绩—素质教育—考试成绩”这一循环往复的过程中思考问题．搞素质教育能直接提高学生的考试成绩，好的考试成绩又能进一步刺激人们搞素质教育，使得素质教育不断推进，学生的考试水平不断提高．事实上，文[1]在结语中已经阐明“提高学生的考试水平，不是数学素质教育的最终目标，它只是通过数学考试成绩这一敏感的指标，使人们看到数学素质教育的威力．随着数学素质教育的不断推进，考试将逐步变为素质测试的手段，从而数学素质教育才能找回真正的自我”．

3 数学考试命题科学化是关键

素质教育与数学考试的循环推进能否顺利实现，是以考试命题的科学性为前提的．试想一下，高考数学命题都是偏题、怪题，助长学生死记硬背的固定题型，或试题容量过大，不容学生有太多思考就快速作答．那么，数学教师们只好搞应试教育：“题型+解法”的大运动量训练，猜想、押题，到处搞高考信息等．在目前基本上以高考成绩来评价学生、教师和学校的形势下，命题科学化自然成了推进数学素质教育的瓶颈问题，它决定着素质教育与考试成绩的良性循环，还是应试教育与考试成绩恶性循环的大问题．

自2000年教育部颁布《高中数学教学大纲》（试用修订版）以来，在“3+x”高考改革的背景下，国家考试中心命题专家本着“课程改革推进到哪一步，命题改革就跟进到哪一步”的思想，对数学高考命题进行了积极的探索，取得了可喜的成绩．随着《高中数学课程标准》的出台与实验，以及各省、市、自治区单独命题的实践，高考数学命题正在从经验型向科研型发展，逐步趋于成熟．科学的数学命题除了能评价学生的数学知识与思想方法外，最重要的是能评价学生的学习过程、数学能力与个性品质，从而较好地评价学生的数学素质水平．

3.1 过程评价

《高中数学课程标准》在“课程目标”中明确提出了“通过不同形式的自主学习、探究活动，体验数学发现与创造的过程”的要求，并在“课程的基本理念”与“课程实施建议”中又强调了“让学生经历数学知识的形成过程”[5]．数学考试作为一种典型的终结性评价形式，似乎很难评价学生的学习过程，但科学的命题却能对学习过程发挥良好的导向作用．纵观近几年的高考数学试题，综合题、应用题、探索题占了相当大的份量，这些题型是评价学生数学学习过程的重要素材．综合题要求学生平时注重学习后的整理与反思，考虑所学数学知识与前后知识的联系，这一知识与其它学习领域的哪些知识相关，可否列出这一领域数学知识的网络结构图；应用题要求学生平时在课堂上教师创设的实际问题情境中，自觉进行数学地思考，认真分析问题，试图建立数学模型，并予以解决，逐步积累解题经验（解题的一般方法，而不是“题型”方法）；探索题要求学生平时学习数学不能只是简单模仿与记忆，而应通过自主探索与合作交流来学习数学．这些题型不同于常规题型，往往具有较强的研究性，学生一般不能按照固定的解题模式，根据熟练的“题型知识”来解决它们，要求学生在数学学习过程中，注重研究性学习方法，把数学学习过程变成自己的数学研究过程．平时一直在从事数学研究性学习，考试时解决几道研究性数学问题就不足为奇了．相反，如果平时没有研究性学习经验的积累，学生在考试时就不可能在有限的时间内完成几个研究性试题．

3.2 能力评价

在数学学习评价中，最重要的评价项目当属以数学“双基”为载体的能力评价．能力评价是数学新课程极力倡导的评价理念，也是近年来数学高考命题始终追求的目标．传统的纸笔测试主要强调数学知识的覆盖面，对各种题型的灵活反应速度，学生自然会陷入数学“题海”之中，其数学能力并没有很好地发展起来．科学的数学命题注重对学生数学思维能力的考查，不仅考查学生数学知识的综合水平，而且还能测试学生各种数学能力的发展水平．无论是空间想象、直觉猜想、归纳抽象、符号表示、运算求解、演绎证明、体系构建[6]等多方面的特殊数学思维能力，还是一般的提出问题、分析问题与解决问题的能力，都能得到充分体现．从素质教育的角度而言，提出问题、分析问题与解决问题的能力更为重要．因为这种能力不仅可在数学学习中发挥作用，而且能迁移到其它学科的学习中去，成为学生个人综合素质的重要组成部分．培养学生的数学思维能力可使学生逐步形成

理性精神，成为素质结构的一部分，还可开发学生智力，挖掘学生的潜力，更是提高学生素质水平的重要途径．学生在理解众多基础知识，掌握各种基本技能的基础上，如何在有限的时间内把相关知识与技能进行调动、组合、运用，是解答数学高考题的关键，学生的得分情况直接检验了其数学思维能力的强弱，从而反映了学生数学素质水平的高低．

3.3　个性评价

数学新课程在课程目标中明确提出“情感与态度”目标，这是对原教学大纲“教学目的”中“个性品质”的继承和发扬．科学的数学命题，对学生学习数学的个性评价是很有帮助的．由于试题没有固定的题型解法可套，需要学生自己探索结论，寻求解法，对培养学生的创新精神非常有利．为了提高试题的效度和区分度，命题者采用层层铺垫、步步推进的多小题形式，使学生对问题的解决做到“切入容易深入难”，正好体现了人们对数学问题的研究方向．人们对数学问题的研究，往往是从简单的具体问题入手，随着问题的深入，研究的难度逐步加大，最后的高难度问题，只有少数人能够解决．这些题目（尤其是试题的最后一问）往往有一定的难度，要求学生从易到难，迎难而上，逐步推进，如果学生没有一定的毅力，那是不可能做到的．设计多问的题目，要求学生逐个解决问题，前面的解答正确与否，直接影响后面的解答，学生应具备解题后进行检验与反思的良好习惯．最后，学生在有限的时间内，对难度不同题目的取舍，时间的分配，也是要认真考虑的．解决较难的题目，自然能得高分，但要花费较多的时间．风险与利益同在，这对培养学生的风险意识和决策能力都是有效的．

当然，作为选拔性考试的高考，在追求公平与效益综合平衡的理念下，改革的步伐是稳健的，并且这一状况将会在较长时间里继续保持．正在全国推进的高中数学课程改革，以及最新的数学教育研究成果，对高考数学命题提出了更新的要求，必将促使数学高考真正成为推进数学素质教育的“指挥棒”．随着数学素质教育的不断推进，考试将逐步变为素质测试的手段，从而数学素质教育才能找回真正的自我．

[参 考 文 献]

[1]　郑正亚，石循忠．数学素质教育是提高学生数学考试水平的关键[J]．数学教育学报，2001，10（2）：65–67．
[2]　陈骏．数学教育为了什么[J]．数学教育学报，2001，10（4）：52–54．
[3]　吴绍兵．数学素质教育要勇敢地面对考试[J]．数学教育学报，2004，13（2）：65–66．
[4]　中华人民共和国教育部．全日制义务教育数学课程标准（实验稿）[M]．北京：北京师范大学出版社，2001．
[5]　中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准（实验）[M]．北京：人民教育出版社，2003．
[6]　中华人民共和国教育部．全日制普通高级中学数学教学大纲[M]．北京：人民教育出版社，2002．

Rational Thinking About the Evaluation of Mathematical Quality Education

SHI Xun-zhong，ZHENG Zheng-ya
(Department of Mathematics, Human University of Science and Engineering, Hunan Yongzhou 425100, China)

Abstract: The relationship between quality education and mathematical examination was the sensitive problem of the evaluation of mathematical quality education. The developmental evaluation that the new curriculums initiate encounters the challenge of the examination result which was a realistic index, mathematical examination should be treated correctly by quality education. In the circulative process on “quality education, examination result, quality education, examination result”, the relationship between the quality education and mathematical examination should be held. The reform about paper-setting of mathematical examination in the College Entrance Examination in the last few years, which tested the student’s quality level at a large extent, illustrated that paper-setting of mathematical examination scientifically was the key that promotes the prosperous cycle of quality education.

Key words: quality education; curriculum evaluation; mathematical examination; paper-setting of examination

[责任编校：周学智]

关于人教版小学数学新教材中若干问题的思考

戎松魁[1]，黄崇龙[2]

（1．杭州师范大学 初等教育学院，浙江 杭州 310036；2．杭州市教育科学研究所，浙江 杭州 310003）

摘要：目前小学中使用的人教版小学数学新教材是课程改革的重要成果之一，具有鲜明的新时代特征．然而新教材中还存在不少问题：把棱长为1厘米的正方体作为长度单位；认为小数和名数可以互化；要学生找出正方体和长方体的不同之处；规定“因数”这个名词在不同场合有不同的涵义等．这些问题对小学数学教学造成了不良的影响，在《数学课程标准（实验稿）》修订之后，应尽快对人教版小学数学新教材进行必要的修改．

关键词：课程改革；新教材；数学课程标准

中图分类号：G423.3　**文献标识码**：A　**文章编号**：1004-9894（2008）02-0058-03

教育部制订的《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》（以下简称《标准》）于2001年7月正式颁布．同年，人民教育出版社出版的义务教育课程标准实验教科书《数学》（下简称《新教材》）各年级分册陆续出版，这是全国发行最早，使用范围最广的一套新教材．然而，这套新教材还存在一些值得我们探讨和思考的问题．新教材是实现课程改革总体目标的重要保证，因此，希望有更多的教师和专家来关心新教材，关心小学数学教学现状，提出意见和建议，使小学数学教学提高到一个新的水平．

1　新教材中值得探讨的几个问题

新教材中值得探讨的问题较多，本文主要就教材中涉及数学基础知识的问题进行探讨．

（1）正方体（1立方厘米）是否可以作为长度单位．

新教材二年级上册第1单元的教学内容是“长度单位”，与之配套的《教师教学用书》第18页上指出：“前面教学统一长度单位的必要性时，已经引出统一的长度单位——正方体（1立方厘米）……”《教师教学用书》是教师教学的指导用书，不少教师都是在该书的指导下完成备课和教学任务的，然而该书把体积为1立方厘米的正方体说成是“统一的长度单位”，且这并非是笔误，而是按照教材内容要求经过精心设计使学生和教师相信体积为1立方厘米的正方体可以作为“统一的长度单位”的．在新教材二年级上册第1页中，教材安排了请小朋友用硬币、小刀、三角形、铅笔、正方体等物品测量书本边长的活动，在练习中又要求学生用正方形去测量胡萝卜、玉米、大蒜的长，用正方体去测量小刀、橡皮、曲别针、蜡笔的长，通过这些活动，学生大都能得出如下结论：“书边大约有4个三角形那样长”……“书边大约有15个正方体那样长”．而《教师教学用书》第17页上建议教师这样启发学生：“要想得到相同的结果，应选用同样的物品作标准进行测量．”还建议：“在此基础上，让学生用同一物品（如方木块学具）作计量单位去量不同的物品看结果如何．”由此可知，《教师教学用书》的作者的确是把正方体作为长度的计量单位了．不仅如此，连硬币、三角形、铅笔也都成了长度单位．这样一来，长度单位是被物品“具体化”、“生活化”了，但“长度单位”的概念却被模糊了．我们听了几位教师执教“长度单位”的课，都是按照《教师教学用书》的建议教学，没有一个学生或教师对此提出异议．

事实上，任何一种物品是不能作为长度单位的．例如棱长为1厘米的正方体木块，它不能作为长度单位，可以作为长度单位的是它的棱的长度或某个面的对角线的长度等．教材为了“使学生初步经历长度单位形成的过程，体会统一长度单位的必要性，知道长度单位的作用”而要学生用不同的物品去测量另一些物品的长度，以致使学生错误地认为这些物品就是“长度单位”．事实上，对二年级的小朋友来说，没有必要使他们“经历长度单位形成的过程”．

（2）小数和名数是否可以互化．

众所周知，“小数”是“数”，而“名数”表示的是“量”．“量数和计量单位的名称合起来叫名数，如3米、1吨20千克，都是名数．”[1]由此可知，小数和名数是不可以互化的．然而新教材却多次要求学生将“小数”和“名数”进行互化．

例如在新教材四年级下册第69页上有这样的例题：“把上面的数据改写成以米为单位的数．”这里所说的数据是指80厘米，教材中最后得出结论：80厘米=0.8米．把0.8米叫做“以米为单位的数”，甚至把它叫做“小数”，这显然是错误的．又如新教材第77页上有这样一个练习题：“2003年我国在校小学生116 897 000人，改写成用‘亿人’作单位的数（保留一位小数）．”该题是要学生将116 897 000人改写成1.2亿人．显然，“1.2亿人”是一个名数，而不是数．

在与之配套的《教师教学用书》中，错误的说法更多了，例如在第122页上指出：“把单名数改写成小数是教学的重点”，并以80厘米=$\frac{80}{100}$米=0.80米为例，说明这就是把单名数改写成小数．显然，这里错误地把0.80米当作小数了．又如在第121页上指出：“在改写时，学生先要判断哪个单位大，哪个单位小，是从高级单位的数改写成低级单位的数，还是从低级单位的数改写成高级单位的数”，对于“数”来说，从来就没有“高级单位的数”和“低级单位的数”之分，

收稿日期：2008-01-05

作者简介：戎松魁（1942—），男，浙江宁波人，副教授，主要从事中小学数学教材和教法研究．

这里指的应该是“带有高级计量单位的名数”和“带有低级计量单位的名数”，显然，这里又把“数”和“名数”的概念混淆了.

（3）正方体和长方体究竟有哪些不同点.

新教材五年级下册第 30 页上要求学生找出正方体和长方体有哪些相同点，有哪些不同点，在与之配套的《教师教学用书》上指出了长方体和正方体的相同点和不同点，其中所列的不同点如表 1 所示：

表 1 长方体和正方体的不同点

形体	不同点		
	面和形状	面积	棱长
长方体	6 个面都是长方形（特殊情况有两个相对的面是正方形）	相对的面面积相等	每一组互相平行的 4 条棱的长度相等
正方体	6 个面都是正方形	6 个面的面积都相等	12 条棱的长度都相等

如果我们仔细分析一下，就可发现这并不是它们的不同点，从“面的形状”看，作者已经偷换了“长方体”的概念，这里的“长方体”只是一些长、宽、高不全相等的“长方体”了，这显然是不对的. 再从“面积”来看，正方体的“6 个面的面积都相等”，而长方体“相对的面的面积相等”，事实上，“相对的面的面积相等”并不排除“6 个面的面积都相等”的可能，况且正方体也具有“相对的面的面积都相等”的性质，因此这并不是它们的不同点. 对于“棱长”的比较也存在类似的问题.

在新教材的第 30 页上还指出：“正方体可以看成是长、宽、高都相等的长方体. 我们可以用图 1 来表示长方体和正方体的关系”，既然正方体集合是长方体集合的一个真子集，我们怎么能找出正方体和长方体的不同之处呢？要学生认识正方体，可以让学生找一找正方体的特点就可以了，不能叫他们去找正方体和长方体的不同之处.

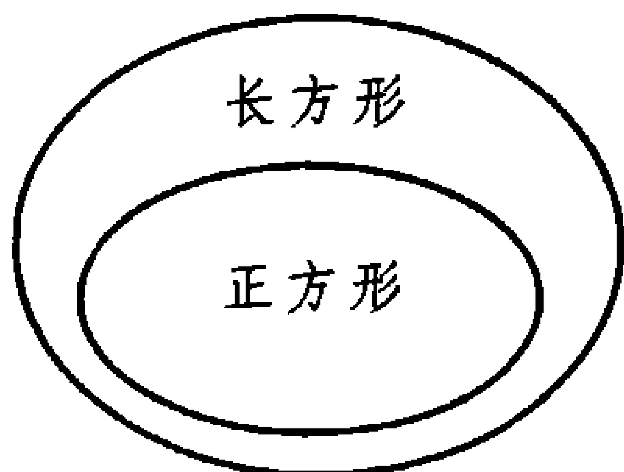


图 1 长方体和正方体关系

（4）使“因数”具有两种不同的涵义是否合理.

“因数”这个名词在新教材中有两种不同的涵义. “因数”这个名词最早出现在二年级上册“乘法的初步认识”这一教学内容中，在教科书第 47 页上列出算式 5×3=15 和 3×5=15 后，指出 3 和 5 都叫因数，15 是积，“×”叫乘号. 此后，凡是出现在乘号两边的数，不管是整数还是小数、分数都叫做“因数”，而且全套教材中都不出现“乘数”这个名词，也就是说，新教材中用“因数”取代了过去教材中的“乘数”. 然而，在五年级下册“因数与倍数”这一单元中，“因数”又有了新的涵义. 在这一单元中出现的“因数”必须是整数. 在该册教材第 12 页上指出：“注意：为了方便，在研究因数和倍数的时候，我们所说的数一般指的是整数（不包括 0）”，在与之配套的《教师教学用书》第 33 页上指出：“因数和倍数是一对相互依存的概念，不能单独存在. a 是 b 的因数，反过来是 b 就是 a 的倍数，因此，描述因数或倍数时必须说清楚谁是谁的因数（或倍数），要引导学生使用比较规范的语言，如‘2 是 12 的因数，12 是 2 的倍数’而不是‘2 是因数，12 是倍数’，在课堂上或练习中学生如果出现类似的错误要及时加以纠正. ”在同一页上还指出：“要注意区分乘法算式各部分名称中的‘因数’和本单元中的‘因数’的联系与区别，在同一个乘法算式中，两者都是指乘号两边的整数，但前者是相对于‘积’而言的，与‘乘数’同义，可以是小数，而后者是相对于‘倍数’而言的，与以前所说的‘约数’同义，说×是×的因数时，两者都只能是整数. ”由此可知，《教师教学用书》的编者确认“因数”有两种不同的涵义，而且要教师区分这两个‘因数’的联系与区别.

在同一套教材中，“因数”既与“乘数”同义（可以是小数），又与以前所说的“约数”同义（不能是小数），这显然是不合理的，不利于小学数学教学.

（5）在规定了“6×3 也可以记作 3×6”之后，乘法交换律应该如何处置.

新教材二年级上册第 4 单元是“表内乘法”，教材通过算式 3+3+3+3+3+3=18 来说明“像这样的加法，还可以用乘法表示：6×3=18 或 3×6=18. ”教材是按《标准》编写的，《标准》中是有这样的一个注释：“关于乘法：3 个 5，可以写作 3×5，也可以写作 5×3，3×5 读作 3 乘 5，3 和 5 都是乘数（也可以叫因数）. ”[2]由此可知，6×3 也可以记作 3×6，据此推理，对于任何大于 1 的自然数 a、b，a×b 也可以记作 b×a. 然而新教材四年级下册中又安排了“乘法交换律”的教学. 教材通过让学生计算 4×25 和 25×4，得到 4×25=25×4，然后再写出这样的一些乘法算式，再归纳出“交换两个因数的位置积不变，这叫乘法交换律，用字母表示：$a\times b=b\times a$. ”既然二年级时已规定 6×3 可以写作 3×6，而到了四年级 4×25 就不能写作 25×4，而是要学生通过计算来验证，再用不完全归纳法得到 $a\times b=b\times a$. 这不是多此一举吗？事实上，规定了 6×3 可以记作 3×6 之后，$a\times b=b\times a$ 已经不能称为“乘法交换律”了，它只是一个规定而已. 当然，这种“规定”是否合理也是值得探讨的.

2 思考与建议

通过以上分析可以看出，新教材中还存在诸多问题，因此，如何提高新教材的质量就值得我们思考.

2.1 数学课程改革需要高质量的数学课程标准

刘兼和孙晓天老师指出：“《标准》是整个基础教育数学课程改革系统中的一个重要枢纽，它的内容要涉及教材编写、教学、评估和考试命题等各个具体领域，它的内容要体现国家对义务教育阶段学生在知识与技能、过程与方法、情感态度和价值观等方面的具体要求. ”[3]对如此重要的纲领性文件，其自身必须是高质量的. 然而，《标准》本身却存在不少值得商榷之处.

文[4]指出了《标准》第 13 页上一个注释所存在的 3 个问题，正是由于这个注释，就使教材中出现了本文（1）、（2）节所指出的问题，对教材编写工作造成负面影响，建议《标准》修改时去掉这个注释.

文[5]则指出了《标准》中存在的 8 个瑕疵，这些瑕疵中有简单的数据错误（《标准》第 28 页例 5），也有耐人寻

味的数学概念的错误．例如在《标准》第50页上有这么一个案例："用一张正方形的纸制作一个无盖的长方体，怎样制作使得体积较大？"这里所提的"无盖的长方体"是一种错误的说法．对于长方体有这样的定义："底面是矩形的直平行六面体，叫做长方体．"[6]由此可知，长方体是一个六面体，它不存在什么"盖"，如果少了一个面，那么它就不是长方体了，更谈不上它的"体积"大小了．正是由于《标准》中出现了"无盖的长方体"这样错误的说法，于是在北师大出版的新教材《数学》七年级上册第212页上就出现了标题为"制成一个尽可能大的无盖的长方体"的课题学习材料，在近几年出版的杂志上也经常可看到"无盖的长方体"这种说法，由此可见《标准》影响之大，同时也说明《标准》本身应该是要经得起仔细推敲的．

总之，要有高质量的新教材，首先要有高质量的《标准》．2003年10月曾在沈阳开过《标准》修订研讨会，并对《标准》进行了修订，然而四年多时间过去了，修订后的《标准》仍未颁布，我们期望修订后的《标准》早日颁布，以便早日修订教材．

2.2 新教材亟需修改与完善

综观新教材，除了存在涉及数学基础知识的问题外，还存在其它方面的一些问题．例如，对于"统计"这一教学内容的安排就值得商榷．在小学阶段"统计"的学习内容主要是收集数据、设计简单的调查表、画条形统计图、画折线统计图、画扇形统计图等．然而就这些学习内容却被编成了10个单元（12册教材中除了复习课外共94个单元），除了一年级上册、三年级上册中没有"统计"内容外，其余十册教材中每册都有一个单元叫"统计"，这就难免会使某些单元内容有相似之处，学生从一年级开始就学"统计"，一直学到六年级，几乎每学期都学一个单元，实在没有必要．事实上，"统计"这些内容编成4个或5个单元已经足够了．总之，新教材中存在的问题还是不少的，亟需修订和完善．

李善良先生认为："……而一套好的教材最难写，因为它是一个群体（包括数学家、教育学家、心理学家、优秀教师）的长期研究、实验、升华的结晶．"[7]事实确实如此，一套新教材诞生之初存在一些错误和缺点是难免的．但由于教材"将影响到数以万计的学生的终生发展"[7]，所以存在的错误和缺点又必须及时消除．

近几年来，一大批教育工作者以极大的热情关注着课程改革，他们在数学教育杂志上发表了大量关于课程改革的文章：有赞美新教材、介绍使用新教材经验的，也有指出新教材中不足之处、提出改进建议的，这些文章有力地促进了课程改革的深入开展，教材编写者可以对这些文章进行收集、整理和研究，然后对新教材进行修改和完善．我们相信，在不久的将来，经过修订的人教版新教材将会成为适合我国国情、符合新时代要求、质量一流的新教材．

[参 考 文 献]

[1] 洪潮，王明欢．小学数学基础理论和教法[M]．北京：人民教育出版社，1984．
[2] 中华人民共和国教育部．全日制义务教育数学课程标准（实验稿）[M]．北京：北京师范大学出版社，2001．
[3] 刘兼，孙晓天．全日制义务教育数学课程标准（实验稿）解读[M]．北京：北京师范大学出版社，2002．
[4] 戎松魁．关于《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》中一个注释的探讨[J]．数学教育学报，2004，13（2）：32–33．
[5] 戎松魁．《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》指瑕[J]．中小学数学（小学版），2003，（1–2）：69–71．
[6] 张奠宙．中学教学全书・数学卷[M]．上海：上海教育出版社，1996．
[7] 李善良．论中小学数学教材编写的基本原则[J]．数学教育学报，2007，16（1）：73．

Opinions To Some Problems Existed In Primary School New Mathematics Course Textbook of People Education Press Version

RONG Song-kui[1], HUANG Chong-long[2]
(1. Primary Education College, Hangzhou Normal University, Zhejiang Hangzhou 310036, China;
2. Hangzhou Education Science Research Institute, Zhejiang Hangzhou 310003, China)

Abstract: New Mathematics course textbook of people education press version was now widely used in primary schools and was one of the most important achievements of the course reform, it had a vivid characteristic of the new times. However, there still existed some problems in new mathematics course textbook: for example, taking one centimeter side cube as the length unit; decimal and concrete number could be interchanged; demanding pupils to find out the difference between cube and cuboids; Regulating the meaning of submultiples changes based on different environment, etc. These problems may have negative effect on primary school mathematics teaching. So it was very necessary to revise the primary school new mathematics course textbook of people education press version sap, especially since the *Mathematics course criteria*（*experimental version*）had been revised.

Key words: course reform; new textbooks; mathematics course criteria

[责任编校：周学智]

关于《普通高中数学课程标准（实验）》适用性和科学性的几点思考

张永超

（安徽省巢湖市教育局 教学研究室，安徽 巢湖 238000）

摘要：《普通高中数学课程标准（实验）》（下称《课标》）及其配套教材的实验三年多来，其适用性、科学性一直受到广大数学工作者和社会各界的高度关注．《课标》设计的多系列课程的可行性、适用性倍受争议，《课标》所设计的选修课程与高考大纲的关联及其在实验过程中的实施情况引发了对《课标》权威性的质疑，这些都与分学段、按模块设计的课程结构和课程内容有关．

关键词：高中数学课标；学段；模块；适用性；科学性

中图分类号：G423.07　**文献标识码**：A　**文章编号**：1004–9894（2008）02–0061–04

自2004年9月以来，全国已有广东、海南、宁夏、山东、江苏、安徽、福建、浙江、辽宁、天津等10个省市进行普通高中新课程实验．2007年秋季，北京、湖南、黑龙江、吉林、陕西等5个省市也已加入普通高中新课程实验行列．在普通高中数学新课程实验过程中，《课标》及其配套教材的适用性、科学性，一直是广大实验教师和教研人员研究的重要课题，受到社会各界的高度关注．下面，就《课标》分学段设计教学内容，选修课程的设计和开设，初、高中数学内容的衔接等问题作一些分析和思考．

1　高中教学管理受到严峻挑战

按模块、分学段设计教学内容，给高中教学管理带来了严峻挑战．

应该说，《课标》的设计理念、内容选择等方面，已经注意到与《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》的衔接．《课标》提出的“构建共同基础，提供发展平台”、“提供多样课程，适应个性选择”等基本理念，对改变落后的教学方法、正确地理解“双基”、构建科学合理的评价体系等具有十分重要的指导意义，也是此次课程改革力求实现的课程目标．《课标》按模块、分学段设计教学内容，打破高中数学原有的知识体系和结构，目的是期望实现高中数学课程的基础性、选择性、发展性等目标[1]．然而，由于这种对高中数学课程结构、内容的根本性变革，与我国的学制、教育传统和基本国情存在着一定的距离，因而给学校教学管理提出了严峻的挑战．

教育部《义务教育课程设置实验方案》规定，义务教育阶段学校全年假期13周．安徽省安排为：“五一”、“十一”长假各一周，寒假20天（春节前5天，春节后15天），元旦假一天，暑假8周．这样的假日安排，应该是最经济、最符合中国国情和民族传统的．但是这样的时间安排，对于高中数学新课程实验学校来说则难以实行．因为全年若安排假期13周，则全年教学时间只有39周，要想安排4个学段（每个学段10周）的教学时间，显然不可能．对于城市里的学校来说则更不可能．因为城市里的学校每年都要设置高、中考考场，这是每学年下学期教育部门的政治任务和中心工作．考场设置必然要占用教学时间，因此城市里学校全年的教学时间根本达不到39周，除非延长教学时间，加班加点，挤占假期．

教育部《普通高中课程方案（实验）》要求，普通高中每个学期分为两个学段，每个学段教学时间9周，复习检测时间一周．每个学段课程内容教学完成后，要及时进行质量检测和学分认定，因此，无论是课程内容教学的需要，还是学生学完一个模块或专题内容后学分认定的需要，这些时间都是必需且不能变动的．这种刻板、固定的学段时间安排，对于幅员辽阔、东西部时间和南北方季节差异较大的我国国情来说，显然不切实际，难以实现．

根据规定，普通高中学校全年假期11周．为了完成教学任务，安徽省巢湖市制定的2006—2007学年度校历安排，第一学期2007年2月5日~7日期末考试，2月11日（农历腊月廿四）放寒假．第一学期除预备周外，还安排了23周，可是第二学期不仅没有预备周，而且第一周需从2007年2月25日（农历正月初八）开始，即使这样，要排满21周（内含“五一”长假一周），也需要安排到7月21日（7月7日是小暑，7月23日是大暑，已经过了一年中最炎热的季节），这里还不包括城市学校因设置考场而耽搁的时间．7月21日开始放暑假，使得高中生的实际暑假时间不足6周．

义务教育阶段与普通高中假期时间的不统一（义务教育阶段学校全年假期13周，普通高中学校全年假期11周），给各地基础教育的管理，特别是给既有初中，又有高中的完全中学的教育管理带来了空前挑战．可以想象，按照上面的教学时间设计，完全中学的教师与领导，将会在忙忙碌碌中

收稿日期：2008–01–02

作者简介：张永超（1963—），男，安徽巢湖人，中学高级教师，主要从事中学数学教学、评价与课程研究．

不停地运转，很难有完整的修整、休息和参加培训“充电”的假期.

上述尴尬局面，在按学段、分模块设计教学内容的新《课标》实验中，难以从根本上得到解决．这是因为，以前，按照科目与知识体系完整地设计课程，即使某个学期不能按时完成教学任务，教师可以根据知识的前后联系作灵活机动地处理，将部分内容适当地调整，放到下一个学期继续教学，可是现在按模块（或专题）、分学段设计课程，由于每一个学段内容教学后，要及时进行学分认定，并且前后两个模块或专题之间的知识没有关联性，因此没有办法进行调整或下移．另一个根本的原因是，由于我国春节的文化传统与寒、暑假放假的约定俗成，加之我国实行的五一黄金周、十一黄金周制度，造成了我国现行某个学年度，若一个学期时间达到22周，则另一个学期时间必然少于20周，因此我们说，按模块、分学段设计高中课程内容，是不顾国情、不切实际的做法．学校教学管理人员和广大高中教师一致认为，按照学科（代数、几何、三角）体系、分学年编写高中数学教材，最符合中国国情和中小学教学管理实际.

2 给教与学两方面带来诸多困难

按模块和专题设计多系列数学课程，人为地给教与学两个方面带来了诸多困难.

《课标》按模块和专题设计数学课程，目的是想通过螺旋上升，让对高中数学有不同需求的学生学习不同的数学，但是也因此造成了数学知识体系人为地割裂，少数内容前后重复雷同，或有悖知识内在联系与发展规律，给教师的教和学生的学带来了诸多困难.

2.1 知识体系割裂现象明显

不等式、三角函数等都是数学学习的基本工具，以前的大纲及其配套教材是将解一元二次不等式放在初中，或放在高一起始阶段学习的，但是《课标》却将解一元二次不等式与简单的线性规划、均值不等式集中在一起，安排在必修数学5中[1]，这既不便于函数、集合知识的教学，也使得重点与难点（必修数学5中的数列、不等式等内容）过于集中．因为必修数学1“集合、函数概念和基本初等函数I”教学时，需要应用不等式的有关知识，所以不少教师不得不在必修数学1教学时提前进行解一元二次不等式内容的教学.

应该说，基本初等函数II（三角函数）与平面上的向量、三角恒等变换被安排在一个模块（必修数学4）中进行教学是比较恰当的，但是将“解三角形”与“数列”、“不等式”这些数学知识和思想方法没有内在联系的内容捆绑在一起，安排在必修数学5中[1]，则属典型的人为制造的知识割裂现象，是为了分学段设计课程、拼凑模块教学内容不得已而为之的行为.

必修数学2中，解析几何内容只涉及到圆与方程，而双曲线、椭圆与抛物线的定义、标准方程和几何性质等内容却被安排在选修系列1、选修系列2中，因此只要求取得高中毕业学分而不参加高考的学生，则难以学到圆锥曲线的相关知识，这对学生数学素养的培养十分不利．要参加高考的学生，在学习选修课程中圆锥曲线的相关内容时，必须重新温习以前学过的解析几何的基础知识和方法．再者，《课标》在必修数学2平面解析几何初步中列出了有关空间直角坐标系的内容，不仅与章节名称不符，而且这里的空间直角坐标系与选修2-1中“空间中的向量与立体几何”相关内容相隔太远[1]，也属知识割裂的表现.

2.2 初高中内容衔接断层问题突出

一是学习高中数学课程时，学生的基础知识准备不足，例如学生在学习解析几何内容时，讨论直线与圆锥曲线，以及圆锥曲线之间的位置关系时，经常需要应用一元二次方程根的判别式、根与系数的关系，简单的二元二次方程组，以及立方公式、分组法分解因式等知识和方法[2-4]，而这些知识和方法在《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》中已经删去．二是少数高中数学内容与初中数学或相关学科知识存在重复现象，例如：必修数学2中三视图、中心投影、平行投影，以及必修数学3中统计的部分内容，都与初中数学知识存在交叉与重复现象；必修数学3算法初步中基本算法语句等内容与大学的信息技术课程内容存在重复现象．而初、高中《课标》关于三视图称谓（初中称主视图、左视图，高中称正视图、侧视图）的不一致[1]，则是人为制造的初、高中数学内容的不衔接.

2.3 教学要求难易悬殊

现在一种比较普遍的现象是，新进入课改实验的教师，由于对必修课程5个模块，与选修系列1、选修系列2，以及选修系列4中相关内容的联系缺乏了解，他们难以整体把握教学的层次和难度要求，导致他们在必修课程教学时，下意识地进行“深挖洞”，过多地进行知识的拓展或延伸，于是增加课时、加班加点现象十分突出，有的甚至比使用原来大纲教材教学时还要严重，他们大多期望在必修课程教学时，在难度要求、教学层次就能达到未来高考的要求，但是到选修课程教学时他们又发现，原先补充讲解的许多内容，都被安排在后续的数学教材中，不可避免地造成了教学的低效重复和时间浪费[2-4].

另一种值得注意的现象是，如果仅仅根据《课标》精神，按照课本内容的层次要求进行教学，那么教学只能是蜻蜓点水，难以透彻和深入，学生获得的基础知识和基本技能，难以适应高考试题的要求，难以应对3年后的高考．由于教学要求低，训练不到位，教学时间自然宽裕，若如此，两年即可完成高中规定的教学内容，这在政策上无声地支持和助长了高三全年复习、不参加高考的学生可能会过早地走出校门的现象.

2.4 学生负担畸形发展

根据《课标》规定，学生完成10个学分（修完5个必

修模块的课程）即可达到高中毕业要求，如果这些学生升入高中学习只是为了获得高中毕业文凭，估计他们只需要在高中度过一年半不到的时间即可以完成，因此我们说，这样的课程方案，使得这部分学生没有机会更多地接触或了解高中阶段的其它数学知识，变相地剥夺了这部分学生完成3年高中学习的机会，这既与国家的教育方针要求、与课程改革的初衷相违背，又不符合公平性原则与和谐社会建设的要求，不符合公民受教育权利的法律规定．如果这部分学生不期望立即获得高中毕业文凭，也不期望升入高校继续求学，则余下的高中时光如何度过，难以想象．

《课标》要求，5个模块的必修课程是每个学生都必须学习的数学内容，完成5个必修模块的学习，即可获得10个学分，就达到了毕业要求，如果一些学生恰好是这5个模块的学分不能完全得到，那么他们学习其它模块或专题获得的学分，能否算在毕业必须的10个学分内？若不能，则只能认为，这样的规定过于狭隘，不符合以人为本的发展理念．

对于参加高考的同学来说，负担不仅没有减轻，反而加重了[5]．因为原大纲中要求高考的内容不仅没有删减，而且还将原来初中的部分几何内容调整到高中，增加了如算法初步、定积分与微分、坐标系与参数方程等原高中数学教学大纲中没有出现或已经删去的内容．以上分析表明，《课标》所设计的多系列、多模块课程，导致了学生学业负担的畸形发展．

2.5　高中数学的重点内容与主体知识弱化

原来的高中数学教学大纲及其配套教材，按知识体系编写，各部分内容的重点、难点比较明确，数学知识容易用某条知识主线进行串连，能够有层次、有梯度地逐步展开，有利于对学生进行基础知识、基本技能和基本思想方法的教学，但是现在的《课标》及其配套教材，采用了各部分知识混编和螺旋上升的方式，将一些自成体系的知识块分割成若干个知识单元，分散在必修模块、选修模块或专题中，导致知识结构与体系完全被打破．例如，必修数学5中安排了一元二次不等式的解法，二元一次不等式的几何意义，基本不等式的证明与应用等内容，而选修4–5，首先是不等式的基本性质和基本不等式的复习，之后是绝对值不等式的几何意义及解法，柯西不等式及其几何意义，排序不等式，数学归纳法，贝努利不等式，不等式的常见证明方法等．分散安排后，不等式部分的重点内容是什么，主要的数学思想、方法是什么，似乎已经模糊不清．

《课标》设计了5个模块的必修课程和4个系列的选修课程，代数、三角函数、解析几何、立体几何等知识体系被瓦解，知识的系统性、完整性不复存在，高中数学的重点内容不见了，主体知识消失了，这样的课程结构，不论对教师教，还是学生学，都难以按某条知识主线或逻辑体系进行呈现和讲解．

此外，高中立体几何部分，突出向量的工具作用，提倡用向量运算来研究几何图形中的线面关系，用数（向量）的运算替代对空间线面关系的认识和逻辑论证，使得学生在初中几何论证能力已经弱化的基础上，几何推理论证意识再一次淡化，对空间线面位置关系的认识能力和推理论证能力进一步弱化，对学生的空间想象能力和逻辑推理能力的培养十分有害[5]．

3　《课标》的权威性受到挑战

选学课程系列的复杂化和教学的可行性，使得《课标》的权威性受到挑战．

目前，各高中课改实验区都十分关注本省（市）高考方案的制定，特别是关注选修系列3、选修系列4课程在未来高考方案中考试内容的具体要求．对于初次进入高中课改实验的地区或学校，他们最担心的是，开设的选修课程不一定是未来的高考方案中规定要考查的内容．面对选修系列3、选修系列4课程的16个专题，他们都感到十分茫然或困惑．如果选修3、选修4课程的16个专题全部开设，不仅教师的教学水平与教学能力难以完全胜任，学校的硬件设施难以满足要求，而且教师的缺额现象也将十分突出，同时也会极大地加重学生的经济负担和学习负担．各实验学校和教师都迫切地期望本省（市）高考方案能够早日出台，能够对选修课程的考试内容有所限定，尽早明确，这样他们就可以根据高考方案规定的考查内容开设选修课程．基于我国经济发展的现状和高中数学的教学实际，教育部考试中心制定的《2007年普通高等学校招生全国统一考试新课程标准数学科考试大纲》，对高考考查选修系列4中的专题内容作了明确界定：理科只考查几何证明选讲、坐标系与参数方程、不等式选讲3个专题内容，文科只考查几何证明选讲、坐标系与参数方程两个专题内容，题目以选做题的形式出现．对于选修系列3课程，各实验区大多以学生课外阅读自学、小组研究讨论、教师专题讲座等形式进行教学，以报告会、写专题总结报告、小论文等形式进行考查．《课标》实验出现如此局面，与《课标》设计的初衷相去甚远，使得《课标》所着力体现的基础性、选择性和发展性等理念，成为美好的愿望，《课标》所设计的多系列选修课程，也成为课程改革理想的摆设．《课标》的适用性、可行性受到广泛质疑，权威性受到严峻挑战．厚达120页的《课标》，其权威性远不比仅有24页的《全日制普通高级中学数学教学大纲》．高考方案对选修课程内容的确定，预示着高中数学新课程改革的目标难以完全实现．

4　《课标》与教学实际之间两个值得关注的问题

4.1　处理好关注数学应用与强调“双基”教学之间的关系

强调由实际生活引入数学问题，强调数学的应用价值，是《课标》十大基本理念之一，是《课标》区别于原大纲对数学教学的一个基本要求．但是在实际教学中，学生对实际问题抽象为数学问题的能力常常难以达到要求，教师从现实

生活中发现数学问题的能力也有待加强. 更重要的是，数学学习的目标是数学思想方法的学习和应用，所以，在数学教学中，首先应该关注数学基础知识、基本技能和基本思想方法的教学，同时关注用源于学生生活，且学生容易理解的实例导入新课，进行教学，这样的数学应用才会具有价值和意义. 过分地强调数学应用，不仅会增加教学难度，而且不利于学生对基础知识和基本技能的学习，不利于学生形成完整的知识结构. 因此我们说，要关注数学应用与数学基础知识、基本技能教学二者之间的平衡与适度，不可偏重一方而偏废另一方.

4.2 处理好信息技术与数学教学整合的适应性问题

强调利用信息技术辅助高中数学教学，是《课标》的一大特色，这是现代经济和科技发展给教育发展带来的必然要求. 但是，一个不容忽视的问题是[2-4]，目前，广大的高中数学教师使用信息技术辅助教学的自觉性还不够强烈，他们使用信息技术辅助教学的适应性还有一个过程；二是不少高中学校信息技术辅助教学的硬件条件虽然已经满足，但是学校行政领导对信息技术辅助教学的重视程度，如支持教师使用信息技术辅助教学的时间与经济投入等方面，还没有配套的措施予以保障，导致不少高中教师使用信息技术辅助教学的能力还不能满足要求；三是要高度关注信息技术辅助高中数学教学的适应性问题. 因为数学是一门思维学科，数学教学的目的是让学生在思维活动中掌握数学知识、方法和思想，所以，数学教学的进程一定要关注学生的思维进程. 只有信息技术呈现教学内容和展现教学过程时，出现的思维节奏与学生的思维节奏一致、合拍，蕴含的思维含量符合学生的知识水平和思维水平，学生通过观察、思考和分析，能够理解和掌握呈现的知识和方法，这样的信息技术手段的使用才会有效，才会有价值. 使用信息技术辅助数学教学，需要特别关注信息技术使用的必要性和适应性.

[参 考 文 献]

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（实验）[M]. 北京：人民教育出版社，2003.

[2] 张劲松. 深入研读课程教材，切实把握教学要求，努力提高教学质量——对高中课标数学A版教材回访中若干问题的思考[J]. 中学数学教学参考（高中版），2007，(4)：1.

[3] 张劲松. 深入研读课程教材，切实把握教学要求，努力提高教学质量——对高中课标数学A版教材回访中若干问题的思考（续）[J]. 中学数学教学参考（高中版），2007，(5)：1.

[4] 张劲松. 深入研读课程教材，切实把握教学要求，努力提高教学质量——对高中课标数学A版教材回访中若干问题的思考（再续）[J]. 中学数学教学参考（高中版），2007，(6)：1.

[5] 彭玉忠. 关于高中数学新课标的几点意见[J]. 数学通报，2007，46 (4)：23–24.

Consideration on Adaptability and Reasonableness of General High School Course Standard of Mathematics (Experiment)

ZHANG Yong-chao

(Teaching and Research Section of Chaohu Education Bureau, Anhui Chaohu 238000, China)

Abstract: It was three years since *General High School Course Standard of Mathematics (Experiment)* (the following called *Standard*) and necessary teaching materials began to put into practice. All the teachers and people from all trades had been paying close attention to its adaptability and reasonableness. However, the feasibility and adaptability of its series of courses was very disputable. What's more, the connection between the elective courses designed by *Standard* and teaching outline of college entrance examination and implementation in experiment cause great challenge on authority of *Standard*, which were with relation to the module structure and content and by learning stages.

Key words: general high school course standard of mathematics; learning stages; module; adaptability; reasonableness

[责任编校：周学智]

第17卷第2期 数学教育学报 Vol.17, No.2
2008年4月 JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION Apr., 2008

《数值分析》课程教学的新认识及改革实践

万 中，韩旭里

（中南大学 数学科学与计算技术学院，湖南 长沙 410083）

摘要：《数值分析》课程是介绍科学计算的基本理论与基本方法的课程．同其它大学数学基础课相比，《数值分析》课程与计算机科学的关系密切，应用性强．重新思考该课程的核心教学内容、实践性和学习特征，才能真正使该门课程既能培养学生的数学思维活动能力，又能够培养学生应用科学计算方法和计算机技术分析解决实际问题的能力．基于这种新认识，作为教学改革成果的一本创新型教材被推介，并总结了3种以MATLAB为平台进行数值分析课程辅助教学的方法．

关键词：数值分析；教学改革；创新型教材；实践教学

中图分类号：G421 **文献标识码**：A **文章编号**：1004-9894（2008）02-0065-02

1 关于《数值分析》课程的新视角

1.1 关于课程核心内容的新认识

什么是《数值分析》课程的核心内容？这一基本问题关系到如何编写一本好的教材，关系到老师要如何教好这门课程，学生从这门课程中主要学会什么？我们认为，与学生在大学一、二年级或中学阶段学习的任何一门数学课程相比，《数值分析》课程的核心内容是研究用计算机求解数学问题的各种数值计算方法，概念、逻辑推理及各类问题求解的数学技巧相对而言就不像先前课程显得特别重要了．利用数学基础理论知识对各类算法的收敛性和数值稳定性进行分析是围绕所设计的数值计算方法这个核心展开的．

1.2 关于课程的“实践性”的认识

由于数学科学和数学作为一门学科的固有特性(如高度的抽象性和概括性)，几乎任何一门数学课程的教学，从中学到大学，都在强调“理论联系实际”的基本教学原则．与以往课程中“理论联系实际”的基本含义不同，《数值分析》课程教学中所研究方法的“实用性”及其在解决问题中的“高效性”被提到前所未有的高度．各类算法要解决的问题是真正的实际问题，而不是假设中的数学问题．并非理论上没有任何不足的算法，就一定能拿来求解实际问题，我们必须十分看重算法在计算机上运行的实际效果．

1.3 关于课程“学习难”的认识

以往数学课程难学，是因为这些课程具有概念抽象，逻辑体系严密等特点．我们认为，《数值分析》课程学习主要难在运算过程（公式）复杂，这些运算过程本身就不是靠一支笔、一张纸、一台计算器等就可以完成的，而是靠计算机来执行计算的．

2 面向新世纪《数值分析》课程新型教材的编写

基于我们对《数值分析》课程的新认识和多年来的教学经验，我们一直在不断探索编写一本能尽量反映这门课程的教学规律的教材．所幸的是，这种新型教材于2006年终于由科学出版社出版了．同以往教材相比，该本教材主要在以下几个方面作了新的尝试：

（1）本书对所精选的内容作尽量详细地论述和推导，做到通俗易懂，深入浅出，例题翔实．这是因为目前在许多高校，该门课程的教学时数都有一定程度的减少，教师要在课堂上完成数值分析所有经典内容的教学困难较大，所以一个好的方法就是在教师的指导下，让学生有自学这门课程的信心和兴趣，并取得成效．我们坚信，通过各种途径培养学生学好数学的信心，是全面提高教学质量的前提条件．

（2）对部分结论，仅作叙述，删除了繁杂的证明过程．我们这样做的主要原因是，在没有老师具体指导的情况下，许多学生很难判断数值分析这门课程哪部分内容更加重要．尽管这些内容对培养学生的数学思维能力，如严谨的逻辑思维能力有一定好处，但我们认为，数值分析这门课程更应该强调算法的构造思想，算法的具体创造过程，算法的评价和改进，以及算法的具体执行等．

（3）结合数值分析课程的大部分内容，增加了该门课程的计算机数学实验．这主要是基于下面两点考虑：一方面因为数值分析的许多内容已经在理论上和实践中非常成熟，许多算法都已经被开发成了专门的数学软件包，它们具有强大的数值计算功能，易学且具有开放性；另一方面，数值分析这门课程对不少学生或工程技术人员来说，最关心的是构造各种算法思想和如何运用算法直接解决实际问题，他们中的大多数没有时间或者没有兴趣了解数值分析这门课程的细节，所以，一种好的方式就是在它们了解这门课程的基本思想的基础上，直接让他们掌握运用现有数学软件解决实际问题．我们把这种实践数值分析课程内容的过程，叫做数值分析课程实验或计算机数学实验．

（4）该教材除吸收了同类教材的优点外，在编排体系和内容结构上更加注重紧凑和循序渐进．比如说，我们把数值分析课程中要用到的最基础的知识，如范数、向量的内积和正交概念等内容全部放到第一章集中介绍；把求解方程和方程组的迭代法集中到一章介绍，使得在内容的叙述上显得更加浑然一体；把系列圆盘定理作为矩阵特征值的粗略估计方

收稿日期：2007-11-16

基金项目：湖南省精品课程（湘教通[2007]186号）

作者简介：万中（1966—），男，江西都昌人，教授，博士生导师，美国《数学评论》通讯评论员，主要从事数学教育理论、最优化理论及其应用研究．

法单独一节叙述，等等.

3 以MATLAB为平台进行课程的辅助教学

MATLAB是由美国MathWorks公司推出的用于数值计算、图形处理和符号计算等科学计算系统环境．由于MATLAB在数值计算中的强劲功能和解决实际工程问题中的非凡表现，结合《数值分析》课程教学，我们以MATLAB为平台进行数值分析课程的辅助教学.

3.1 以MATLAB为平台进行数值分析的实例教学

数值分析是一门应用性很强的课程，注重理论与方法的实际背景，尽可能用实例诠释数值分析中的概念和方法，是数值分析课程教学改革的一个新尝试．实例教学通常是使用传统教学方式难以实现的大量复杂的数值计算和图形，但若以MATLAB为平台则易于解决的问题．例如用人口增长问题作为实例讲解曲线拟合．人口增长有两个基本模型：一个是指数增长模型，一个是阻滞增长模型．按照两种不同的模型，使用线性最小二乘法分别拟合美国1790至1990年的人口数据，预测美国2000年的人口数据，并将拟合结果和预测数据与实际数据比较．又如制造船体、汽车外形和飞机机翼等的实际应用与样条插值问题，导弹追踪问题与微分方程数值解问题，等等.

通过这些实例，以主要算法为线索，向学生介绍该算法产生的实际背景、重要的历史事件和人物以及其在现实生活中的广泛应用；结合数学软件的求解使学生了解现代计算工具的发展和应用，使数值分析的教学内容呈现多样性和应用性，逐步提高学生学习该课程的兴趣.

3.2 以MATLAB为平台将教学内容直观化

随着计算机科学技术发展和各类教学内容演示软件的开发，可视化教学已成为数值分析课程教学改革的重要组成部分．在数值分析课程教学中，如何在强调数值分析方法的原理、思想和基本理论的同时，利用数学软件加强课程教学内容的直观性，是近年来人们十分热心探讨的问题.

我们以MATLAB为平台，对数值分析课程教学中的许多问题求解过程直接进行演示，并引导学生进行一题多解的尝试，能很好地将抽象的数学知识，繁杂的计算过程直观地呈现在学生们面前，使学生对相应的算法有着非常鲜明的感性认识．比如，对利用雅可比迭代、高斯—赛德尔迭代和超松弛迭代求解线性方程组的数值计算，我们做直观演示后，要求学生比较其收敛和发散的区别，能够大大地激起学生对学习内容及过程产生强烈的兴趣和需要，而且对培养学生初步的科学计算能力有重要作用.

以MATLAB为平台，教师还可以编写一些简单的程序，将教学中的重点、难点和传统教学形式不易讲清的内容用图像动态直观地展示给学生，如利用动态图形来表现牛顿迭代法的思想和迭代过程、演示复合求积算法的设计思想等，对增强课堂教学的直观性起到积极的作用．他们能够使学生对教学内容有一个正确的理解，达到提高课堂教学效果的目的.

3.3 以MATLAB为平台提高数值实验的有效性

数值实验是数值分析课程教学的一个重要环节，是理论与实践相结合的主要途径．MATLAB强大的计算功能、图形处理和良好的交互界面是进行数值实验理想的工具．教师在课堂上配合教材选择一些内容简单、容易实现的实验题目，例如多项式插值的龙格现象实验，我们考虑函数 $f(x)=\frac{1}{1+25x^2}$ 在区间 $[-1,1]$ 内选取6个和11个等距插值节点做观察．如果用C语言来实现这种观察，就不是很简单的事，而且如果算法选择不好，还可能得出错误结果．何况绘制图形本身是许多高级计算机语言，包括C语言的一个难点．如果我们使用MATLAB软件作平台，完成这样的工作就只需要几个简单语句，而且得出的图形美观、准确．这不仅使学生通过数形结合掌握了教学内容，而且使学生感受到了现代计算工具的魅力，促成该门课程教学的良性循环.

[参考文献]

[1] 韩旭里，万中．数值分析与实验[M]．北京：科学出版社，2006.

[2] 李庆扬．数值分析基础教程[M]．北京：高等教育出版社，2001.

[3] 万中，罗汉．加强开放性数学实验课程研究推动数学教育改革[J]．大学教育科学，2003，84（4）：52-53.

New Viewpoints and Practices for Reforming the Teaching of the Course: Numerical Analysis

WAN Zhong, HAN Xu-li

(College of Mathematics Sciences and Computing Technology, Central South University, Hunan Changsha 410083, China)

Abstract: Numerical analysis was a course, which was interested, in the basic theory and methods of scientific computation. Different from other fundamental mathematical courses in the university, it was closely related with computer sciences, and could find many direct applications. Renewably reviewing its core teaching content, practicability and the learning principles could make sure that this course was helpful to train the aptness both in mathematical activity and solution of practical problem based on scientific computation methods and computer techniques. Based on these new viewpoints, we introduce the advantages of the textbook, which had been published as our teaching reformation effort, and study three kinds of approaches to assisting the teaching of this course with the help of the software MATLAB.

Key words: numerical analysis; teaching reformation; innovational textbook; teaching practice

[责任编校：周学智]

第17卷第2期 数学教育学报 Vol.17, No.2
2008年4月 JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION Apr., 2008

大学数学和新课标下高中数学的脱节问题与衔接研究

潘建辉

（重庆邮电大学 数理学院，重庆 400065）

摘要：随着新一轮高中数学课程改革的推进，大学数学和高中数学的课程与教学出现了部分脱节现象．为此，大学数学教材的编著者需结合高中数学课程标准和新教材，适当调整相应学科的教材内容；大学数学教师也应准确把握高中数学新旧课程的差异，并在对所授课程与高中新课程衔接内容进行详细对比的基础上，采取相应的衔接策略．

关键词：大学数学；高中数学；课程标准；内容比较；衔接策略

中图分类号：G421 **文献标识码**：A **文章编号**：1004–9894（2008）02–0067–03

据查证，我国近5年出版的大学数学教材都是参照传统高中数学课程编写而成的．然而，新课标下的高中数学，无论是课程的内容与结构，还是教学的目的与要求，甚至包括教育的思想与理念，都与传统高中数学有着极大差异．因此，随着我国新一轮中小学课程改革的全面推进和新课标下高中数学教材在全国范围内的逐步推广使用，现有的大学数学和新课标下的高中数学之间在课程与教学上的脱节问题，正变得日益突出．这给大学数学教育造成了一定的负面影响．

那么，怎样才能解决好目前大学与高中数学之间的脱节问题呢？就此，本文将主要从高中数学新旧课程的差异、大学与高中数学新课程内容的比较、大学与高中数学教学的衔接3方面加以探讨．

1 高中数学新旧课程的差异

1.1 内容差异

新课程标准下的普通高中数学分为必修和选修内容．必修内容是所有高中生都必须学习的，它覆盖了高中阶段传统的基础知识和基本技能的主要部分．其中包括集合、函数、数列、不等式、解三角形、立体几何初步、解析几何初步等．增加的内容主要有向量、概率、统计、算法等；减少的内容有极坐标与参数方程等[1]．此外，在保证打好基础的同时，进一步强调了这些知识的发生、发展过程和实际应用，而在技巧和难度上的要求则有所降低．

选修课程有4个系列．其中系列1、2分别为文、理科必选内容；系列2在系列1的基础上，增加了空间向量、计数原理，另外还扩展了极限与导数和概率与统计的内容[1]．系列3、4为任选内容，将不予讨论．

1.2 新增内容的高考情况统计

最能体现高中学生学了什么、学得如何的是高考试题．从人民网高考站上公布的今年全国各地共20套理科数学高考试题看，它们都无一例外地考查了极限与导数、向量及其运算和概率与统计的内容，但其中仅有8套、5套和2套分别考查了线性规划、算法和选讲内容．文科的大致相同．

所以，下面主要讨论大学与高中数学在极限与导数、向量及其运算和概率与统计3个板块上的对比与衔接问题．

2 比较与衔接的参照教材的选择

至今，在“一标多本”原则下已审定通过的高中数学教材就有人教A版、人教B版、北师大版、苏教版、湖北版、湖南版，共6种版本．同时，大学数学教材的种类和版本更是名目繁多，单是高等数学就有上百种．所以，欲将高中与大学所有新教材加以比较，既不现实，也无必要．这就需要从中各自选取最具代表性的一种，作为比较分析的参照．

一方面，因使用人民教育出版社编写的高中数学新教材的范围最广，人数最多，且空间向量目前尚未列入高考范围，故选择不含空间向量内容的人教A版作为高中段的参照教材．

另一方面，大学数学中，既直接以高中数学为基础，又在大学广泛开设，还与新增3大知识板块直接相关的课程，只有高等数学和概率论与数理统计．因此，只需从这两门课程中各选一种教材作为大学数学的代表．经管类与理工类高等数学课程，在拟讨论内容上无大的差异，故仅选一般工科院校使用最多的同济版《高等数学》作为参照．同样，对于概率与统计内容，因理工类和经管类有较大差异，故分别选取使用人数较多的浙大版和人大版的《概率论与数理统计》，作为这两类教材的参照．

3 大学与高中数学衔接内容对比

为使大学数学教师准确了解哪些知识，与高中的相比，是大学新增内容、重合内容、差异内容、待补内容，以便教学时作好知识的过度与衔接，下面将衔接内容对比如下．

3.1 集合与函数

集合部分，基本概念和运算略有差异．大学增加了邻域和两集合的Decartes乘积的概念、集合交并补的4个运算律，还在高中补集的基础上补充了差集的概念．另，大学和高中在表示“正整数集合”和“集合A在集合I中的余集”的符号上存在差异，分别用$\mathbf{N}^{+}$与A^{C}和$\mathbf{N}_{+}$与$C_{I}A$表示[2~3]．

函数部分，大学在复习总结高中知识的基础上有所增补和提高．主要有两大特点：(1)大学和高中在给出函数和映射两个概念的先后次序上刚好相反．前者是把函数看成映射的特殊情况，在定义了映射、逆映射、复合映射的基础上，

收稿日期：2007–11–20
作者简介：潘建辉（1965—），男，四川武胜人，教育学硕士，主要从事数学课程与教学论研究．

定义函数、反函数和复合函数的；后者则是把映射看成是函数概念的推广，以“对应”为基础，先定义函数，再定义映射的．（2）增加的内容细节较多，有一一映射、多值函数与单值分支的概念和函数的有界性等．

3.2 极限与导数

高中文理科内容差异很大．文科没有极限与连续的内容，且导数及其应用部分较理科的简易．

3.2.1 极限与连续

高中仅理科有极限与连续的内容．其中包括：数列和函数的极限定义、函数存在的充要条件、函数极限的四则运算、函数连续的定义和连续函数的最大值最小值定理．高中的学习层次是：（1）极限的定义都是描述性的，无精确形式；（2）函数连续的定义，只有大学的“ $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ”[4]形式；（3）函数存在的充要条件、函数极限的四则运算、连续函数的最大值最小值定理，只有结论，无证明；（4）整个极限与连续部分，只要求学生理解极限和连续的概念，能判断给定函数极限的存在性和指定点的连续性．重点是会计算简单类型的函数极限．

大学在极限与导数部分增加和提升的内容较多．有极限的 $\varepsilon-\delta$ 语言形式、收敛数列和函数极限的性质，以及极限存在准则及两个重要极限，等等．

3.2.2 导数及其应用

尽管高中文理科教材中都有导数及其应用，但差异较大．理科包括：（1）导数的概念；（2）几种常见函数的导数公式：常值函数的导数（有证明）、指数是有理数的指数函数的导数（有对于指数是自然数时的证明）、正余弦函数的导数公式（无证明）、对数函数的导数和指数函数的导数公式（无证明）；（3）函数的和、差、积、商的求导公式（商无证明）；（4）复合函数的求导法则（无证明）；（5）根据一阶导数判断函数的单调性、求单调区间、求极值和最值（有结论，无证明）；（6）微积分建立的时代背景和历史意义．文科包括：（1）对极限的描述性说明；（2）导数的概念；（3）常值函数和指数函数的求导公式及证明、多项式的求导[5]．其余与理科的（5）、（6）同，且求最值的应用问题比理科的简单许多．

大学提升或补充的内容较多．有所补充的如：导数的定义中增加了条件 “函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义”和导数为无穷大时的定义[2]等；增加的如：单侧导数、函数在闭区间 $[a,b]$ 上可导的条件、反函数的求导法则、高阶导数、隐函数及由参数方程所确定的函数的导数，等等．另，经管类教材在导数的应用部分，增加了边际和弹性内容[6]．

3.3 向量及其运算

目前，高中文理科同，仅要求学习平面向量及其运算．内容有：向量的概念、向量的加减法、实数与向量的积和向量的坐标运算、线段的定比分点、向量的数量积及运算律、向量数量积的坐标表示、运用向量证明正余弦定理[7]，以及大学没有的平面向量基本定理和点的平移公式．大学增加或提升的内容有三维空间向量和空间解析几何等．

3.4 概率与统计

该部分较复杂．一是初中已学统计初步知识；二是高中有3处涉及该内容，且文理差异较大；三是大学概率论与数理统计课程是一门内容十分丰富的系统科学，且经管类与理工类教材也有差异．因此，本文只能就总体情况作概括性的比较说明．详细的对比需另立课题单独讨论．

一方面，高中学生只需了解概率与统计的一些基本概念，会解决一些简单的概率与统计问题；而大学教材则是从理论的高度，系统地阐述概率统计问题，并要求学生能用概率与统计理论解决较复杂和困难的概率统计问题．具体体现在知识的系统性和理论性大增，概念、公式、内容繁多，知识应用加深、加宽、加难等方面．

另一方面，文科比理科知识点少，学习要求低．文理都学的内容有：随机事件的概率、互斥事件有一个发生的概率、相互独立事件同时发生的概率、抽样方法、总体分布的估计、通过总体调查研究实际问题[4-5, 8]．仅理科学的有：离散型随机变量的分布列、离散型随机变量的期望与方差、正态分布、线性回归[4]．仅文科学的是总体期望值和方差的估计[5]．

此外，理工类和经管类《概率论与数理统计》教材中，各章节含有高中内容的情况，该课程的教师可分别参看浙大版[9]和人大版[10]教材．

4 大学与高中数学的衔接策略

4.1 大学与高中数学的脱节类型及相应的衔接策略

从以上比较中，可归纳出大学数学与新课标下高中数学的脱节类型及相应的衔接策略．

（1）两头不管型．两头不管，就是对高中未学知识，大学教材的编著者误以为是高中的必修内容，在自己的教材中未予补充，从而造成了大学和高中两头不管的结果．如，“利用极坐标计算二重积分”[11]部分，教材没有补充极坐标知识，就直接运用极坐标来解决二重积分问题，这就造成了两头不管的结果．对于这类脱节问题，大学数学教师应在教学中对缺失内容加以补充．

（2）原样重复型．原样重复，就是大学的内容及形式与高中的基本一致或完全重复．由于高中增加了3大板块的内容，所以，原样重复的脱节情况，在大学教材中最多、最严重．如，极限与导数部分，就有极限概念的引入、极限的运算法则、极限的简单计算、左右极限、导数的引入、常见函数的求导公式、根据导数判断函数的单调性、求极值最值，等等，它们都是完全重复的．这是教材的编著者不知哪些是高中新增内容造成的．重复内容若不是后继课的准备知识，则在教学时应略去不讲；若是，则应把它作为引入新课的复习内容．

（3）重复提升型．重复提升，就是在重复高中某一知识后，再对该知识加以提升或补充．这种类型也不少．如，极限和导数的定义、函数商的导数公式及其证明、函数连续的定义等．这种脱节，从教材本身看，并不明显，但因为是重复提高，而不是复习提高，并且有的提升或补充是不必要的，所以，这种情况也算是脱节．如，大学教材中对函数商的导数公式的证明（补充部分），是高中可证而未证的，故大学

亦不必证明. 大学教师在衔接时，应对重复部分作复习处理，而不作新课处理；对提高和升华部分，多数应作新课处理.

（4）前后不一型. 前后不一，就是对同一内容，高中和大学的表述、名称或符号等不一致. 如，“正整数集合”和“集合 A 在集合 I 中的余集”的记号、函数定义的表述方式、“平行的充要条件”的名称、极值定义中“x_0 的某一邻域”与“x_0 附近”的差异，等等. 这种类型，多数不是高中新旧教材的差异所致，而是大学为更严密的表达所需. 如上面提到的极限定义，之所以要改“x_0 附近”为“x_0 的某一邻域”，就是为了定义的精确性. 其它情况多数则是因为无统一规定，或编者各自的偏好和习惯不同使然，但大学教材还是应该对此有所交代. 教学时，教师需附带说明为什么存在差异，何者更好.

（5）新旧混合型. 新旧混合，就是从宏观看，新旧知识被混合地编排在大学教材中. 虽然它可能会包含前面几种类型；从教材看，有些也可能不算脱节. 但为了便于大学教师作好教学衔接，还是有必要单独讨论.

新旧混合型又可分为 3 小类. 一是新旧相间型，就是新旧内容相间出现，如极限与导数部分；二是新布于旧型，就是新内容零星地分布于旧内容中，如集合与函数部分；三是旧布于新型，就是旧知识零星地分布于新知识中，如概率与统计部分. 教学时，对第一和第二小类较易处理，教师只需分清哪些是大学所增，并将其作为新知识处理即可；对于第三小类，相对较难处理，主要是不易准确了解学生已学知识细节和掌握的程度，且这些往往又和大量的新知识的讲解相伴而行. 这种类型如何衔接，需做进一步研究.

4.2 大学与高中数学衔接的其它策略

为更好地衔接，大学数学教师还需从宏观上采用以下策略：

（1）全面了解情况. 包括了解课程标准、教材、高考考试说明、高考试题，以及以问卷或谈话形式，向高中数学教师和学生咨询.

（2）准确了解情况. 因来自不同地区的学生对知识的掌握情况可能存在差异，故开始新课前，需对学生进行预备知识的学前检测. 主要测试与自己所授课程有关，且高中新旧教材有差异的部分，以准确了解有多少学生在多大程度上掌握了哪些知识.

（3）动态了解情况. 虽然大学教材可以稳定一段时间，但学生对预备知识的掌握情况可能每年在变. 一是教材或高考内容可能会随时调整；二是随着改革的继续深入，学习系列 3、4 的学生人数将会不断增加.

总之，在衔接时，必须对高中和大学之间的衔接内容进行细致的对比，全面、准确、动态地把握高中学生对预备知识的掌握情况，做到有的放矢.

［参 考 文 献］

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（实验）[M]. 北京：人民教育出版社，2003.
[2] 同济大学数学系. 高等数学上册[M]. 北京：高等教育出版社，2007.
[3] 人民教育出版社中学数学室. 全日制普通高级中学教科书（必修）数学第一册（上）[M]. 北京：人民教育出版社，2003.
[4] 人民教育出版社中学数学室. 全日制普通高级中学教科书数学第三册（选修II）[M]. 北京：人民教育出版社，2004.
[5] 人民教育出版社中学数学室. 全日制普通高级中学教科书数学第三册（选修I）[M]. 北京：人民教育出版社，2004.
[6] 吴传生. 经济数学微积分[M]. 北京：高等教育出版社，2003.
[7] 人民教育出版社中学数学室. 全日制普通高级中学教科书（必修）数学第一册（下）[M]. 北京：人民教育出版社，2003.
[8] 人民教育出版社中学数学室. 全日制普通高级中学教科书（必修）数学第二册（下 A）[M]. 北京：人民教育出版社，2004.
[9] 盛骤. 概率论与数理统计[M]. 北京：高等教育出版社，2001.
[10] 吴赣昌. 概率论与数理统计（经济类）[M]. 北京：中国人民大学出版社，2006.
[11] 同济大学数学系. 高等数学下册[M]. 北京：高等教育出版社，2007.

On College Mathematics' Lacking of Coordination and Linking with That of Senior Middle School under the New Curriculum Criterions

PAN Jian-hui

(College of Mathematics and Physics, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: With the advance of the new round of mathematics curriculum reform of senior middle school, college mathematics curriculum and teaching had severely been out of keeping with those of senior middle school. Therefore, editor of college mathematics text book should refer to the Curriculum Criterions and the new text books of senior middle school and readjust the contents of corresponding subject in or on time. College mathematics teacher should also be sure of the differences between the new curriculum and the old ones of middle school and take corresponding strategies in connecting up the contents between the curriculum in his teaching and the new one of senior middle school on the base of detailed comparison between them.

Key words: college mathematics; mathematics of senior middle school; curriculum criterion; comparison of contents; strategies in connecting up

[责任编校：周学智]

第17卷第2期
2008年4月
数学教育学报
JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION
Vol.17, No.2
Apr., 2008

《数学方法论与解题研究》课程建设的一些思考

张 雄[1, 2]，陈焕斌[2]，黄云鹏[2]

（1．陕西师范大学 教育科学学院，陕西 西安 710062；2．陕西教育学院 数理工程系，陕西 西安 710061）

摘要：《数学方法论与解题研究》是数学教师专业知识结构中不可或缺的一部分，是数学教师专业化发展的需要，是实施基础教育数学新课程改革的需要，更是数学素质教育的需要．《数学方法论与解题研究》课程的基本内容是：从数学的创造性思维本质出发，论述了数学发现和数学解题的一般性规律、原理和方法．教学改革应贯穿“典、深、通、究、根”教学原则，为学生搭建拓展数学素质教育的平台，综合培养学生的认识论、价值观和方法论．

关键词：教师教育；专业素质；数学方法论；解题研究；教材建设；教学改革

中图分类号：G423 文献标识码：A 文章编号：1004-9894（2008）02-0070-04

基于对师范生专业知识结构和他们未来从业素质需要的考虑，我们在数学教育专业（本、专科）学生中加强师范专业素质教育，开设《数学方法论与解题研究》课程，并着力进行其课程教材建设和教学改革．经过多年实践，取得了比较显著的成效，张雄、李得虎编著的《数学方法论与解题研究》[1]一书于2003年由高等教育出版社出版后，2004年被教育部评选为全国教师教育优秀课程资源，作为教材在全国为数众多的师范院校使用．本项目也获得了陕西省普通高等学校2007年省级优秀教学成果二等奖．本文作为该教学改革项目的初步介绍，愿与同行进行交流并求教于同行．

1 《数学方法论与解题研究》在教师教育中的意义

教师教育要着眼于未来教师的专业素质，数学教师不仅要掌握牢固的数学基础知识，而且要掌握一定的数学方法论和解题理论．只有掌握数学方法论和解题理论的教师，才会培养出具有创新能力的学生．目前我国基础教育数学课程改革，强调情感、态度、价值观，强调数学学习的“过程与方法”，强调探究与发现．在这些新的理念下，要使数学新课改得以有效实施，在教师教育中加强和重视《数学方法论与解题研究》课程的教学就显得非常重要．一位老师曾经说过这样一句话：“教师走多远，你的学生就能走多远．”如果没有一双明亮的眼睛，看不清前面的道路，是无法走得长远的．《数学方法论与解题研究》会帮你擦亮数学智慧的眼睛，会给你插上腾飞数学素质教育的翅膀．相反，如果没有这方面的知识储备和良好的专业训练，将很难适应今天的数学课程改革．新课改的成败，关键在于教师．

数学方法论与解题研究在20世纪90年代曾引起专家学者们的重视[2-3]，并在一些高师院校数学系开设了相关课程．在今天实施基础教育课程改革的新的历史条件下，我们需重新认识数学方法论与解题研究在教师教育中的重要意义，一定会有新的感受．中央教育科学研究所所长朱小蔓教授最近指出：“总体看，师范院校培养模式的改革及其成效滞后于素质教育和基础教育课程改革的要求．”[4]

数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等一般法则的一门学问．至于解题研究（或解题方法论），中国的数学教学被称为“解题教学”，而如果把解题比做打仗，那么数学基本知识就是“兵力”，基本的数学方法就是“兵器”，调动数学基础知识、运用数学基本方法的数学解题研究（解题理论）正是“兵法”．在数学学习过程中，掌握基本概念和定理固然重要，了解这些概念是如何形成的以及获得这些定理的思想方法，有时更重要．因为思想方法不仅有趣、富有启发性，而且可以引导人们去研究新问题、做出新发现[5]．所以，研究前人的数学思想方法，学习数学方法论、数学解题方法论，对于师范学生实在是非常重要的事情．

数学方法论和数学解题研究是数学教师专业化发展及自身成长的必备知识．朱小蔓教授说：“现行师范院校专业学科的课程体系及设置需要调整、完善，它应包括：了解本学科专业基础知识；了解学科历史、学科方法论、学科的社会功能及其伦理标准；对本学科高度热爱的情感、信念；熟悉中小学该学科课程的知识及其教学法；具有与中小学生沟通的知识与能力，等等．”[4]数学教师的专业化发展，不仅仅是要掌握深厚广博的数学基础，而且要了解数学发展的学科历史，掌握数学的思想方法，深刻领会数学的内在本质，理解数学的源与流，懂得其来龙去脉及数学的真正价值．这些方面在数学中往往处于更为基础性的地位，属于“元数学”的范畴．从事数学研究不能不懂数学发现的原理、规则和思想方法，它们能使我们在数学教学中更好地驾驭教材，把数学教学变得更为生动活泼，教出方法、教出发现、教出创新．所以，数学方法论和数学解题研究对于数学教师的专业化成长及自身发展来说，是不可或缺的，其特殊的地位和重

收稿日期：2008-02-21

作者简介：张雄（1961—），男，陕西洛南人，副教授，陕西师范大学硕士生，主要从事数学教育、数学美等研究．

要性是基础数学以及其它专业知识所不可替代的. 实践中常常见到一种现象，数学方法论素养好的教师一般是受欢迎的好教师，其教学也多为上乘的. 这一事实说明了数学方法论与数学教师专业化发展及自身成长之间有着必然的联系.

在实施素质教育过程中，数学教学应作根本上的变动：不再一味追求繁琐的论证，而从数学的源流、原理及推广应用这几方面入手，明白数学是怎么诞生、发展的，数学蕴涵的人文、社会意义是什么？怎样学以致用？从根本上变革对数学的既定观念，以更好地发挥数学对人的精神能力的塑造作用和在科学技术中的作用，从而达到科学与人文完整结合的学科体系的目的. 数学不仅仅是一种工具，它更是一个人必备的素质，它甚至会影响到一个人的言行、思维方式等各方面. 一个人的数学修养并不表现在他会解多难的题、解题有多快和数学能考多少分，关键是看他是否真正领略了数学的思想方法、数学的精神，是否能将这些思想融入到他的日常生活、言行中去. 一个真正懂数学的人未必是个数学天才，但他一定是个高素质的人. 对数学素质的理解，应该注意到：既要理解数学的概念和原理，更要理解数学的本质、数学的价值；既要理解数学的探究过程，又要了解数学发展的历史和方法；既要理解数学与一般文化的关系，又要了解数学与社会的关系，并强调“问题解决”的能力.

总之，在师范院校数学教育专业中进行《数学方法论与解题研究》课程的教学改革，对数学教师教育和基础教育这两个密切相连的领域来说，具有重大的现实意义. 因为，它是数学教师专业知识结构中不可或缺的一部分，是数学教师专业化发展的需要，是实施基础教育数学新课程改革的需要，更是数学素质教育的需要.

2　教学内容和教学方法的改革

《数学方法论与解题研究》课程集中体现的基本内容是：从数学的创造性思维本质出发，论述了数学发现和数学解题的一般性规律、原理和方法. 在数学方法论中，重点阐述了观察、联想、尝试、实验、归纳猜测、类比推广、模拟、化归、几何变换等数学发现的基本方法，分析法、综合法、演绎法、公理化方法、数学悖论等数学的论证方法，数学与物理方法，数学智力的开发与创新意识的培养等；在数学解题研究中，着重阐述了数学解题观、数学解题的思维过程、数学解题策略、解题思想等，着力在“元方法”即追寻解题思路、解题方法上进行研究. 具体内容深入浅出，既有理论原理又有大量典型例题、例证分析，富有启发性.

在教学改革中，我们没有过于抽象地泛泛讲述方法论的条条框框，而是结合数学史，通过具体数学概念、理论、方法的演变来反映数学统一性的本质. 这样做，有血有肉，既真实生动又具有说服力.

例如，一般意义上的普遍性推广，既是数学研究和发现中的一种十分重要的方法，同时也是数学发展的重要动力. 我们在讲授类比推广方法时，选用了哈密尔顿发现“四元数”的例子. 1835 年，哈密尔顿全力投入到建立数的逻辑基础的研究. 他的研究是从对复数的考察开始的. 哈密尔顿首先对复数符号的实质作了解释，他指出：复数 $a+bi$ 不是 2+3 意义上的一个真正的和，加号的使用是历史的偶然，而 bi 不能加到 a 上去，复数 $a+bi$ 不过是实数的有序偶(a, b). 在此意义下，复数的四则运算应该是：

$$(a,b)\pm(c,d)=(a\pm c,b\pm d),$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc),$$
$$\frac{(a,b)}{(c,d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+b^2},\frac{bc-ad}{c^2+a^2}\right).$$

这样，通常的结合律、交换律和分配律都能推导出来. 哈密尔顿把复数的逻辑基础建立在实数的基础上，但他没有去探讨实数的逻辑基础，而是直接进行着创立比复数更高一层次的新数的尝试了.

平面向量的概念获得了它的代数形式——复数，作用于一个物体而不在同一平面上的几个力的结果一般是空间向量. 代数上为了处理它，就需要一个 3 维的类似物. 我们能用点的空间坐标 (x,y,z) 来表示从原点到该点的向量，但不存在 3 元数组的运算来表现向量的运算. 那么可以表示空间向量的代数形式究竟是什么？数学家们开始了寻找所谓 3 维复数以及它的代数形式的探索.

哈密尔顿澄清了复数的概念，这使他能更清楚地思考怎样引进这个 3 维空间的类似物. 他首先想到的是，既然是复数的扩展，那么把这个“类似物”表示为 $a+bi+cj$ 的形式是自然的. 但是，这样的新数却不满足“模法则”：两个向量乘积的模等于这两个模的积. 当时哈密尔顿曾遇到这样的情况：

$$(a+bi+cj)^2=a^2-b^2-c^2+2abi-2acj+2bcij.$$

如果不考虑右端 $2bcij$，或者说假设 $ij=0$，那么右端 $1,i,j$ 各系数的平方和：

$$(a^2-b^2-c^2)^2+(2ab)^2+(-2ac)^2=(a^2+b^2+c^2)^2,$$

恰好符合“模法则”. 可是按“模法则” ij 的模是 1，$ij=0$ 的假设不合理. 于是，哈密尔顿又假设 $ij=-ji$，并假设 $ij=k$. 这样假设的好处是“模法则”成立，但是 k 究竟是什么？这时哈密尔顿考虑一般新数的乘积：

$$(a+bi+cj)(x+yi+zj)$$
$$=(ax-by-cz)+(ay+bx)i+(az+cx)j+(bz+cy)k.$$

他发现在这个乘积中“模法则”正好成立. 如果把 k 设想为同时垂直于单位向量 $1,i,j$ 的新单位向量，那么上述等式表示了：两个属于 3 维空间的向量的乘积，是一个 4 维空间的向量. 真是美妙！

这启发他放弃了对“三元数”的追求，而着手对新数“$a+bi+cj+dk$”的考虑. 研究之后，哈密尔顿发现必须被迫作两个让步：一是他的新数必须包含 4 个分量；二是必须牺牲乘法交换律. 这两个特点对代数都是革命性的，他把这种新数称为“四元数”.

“四元数”：$a+bi+cj+dk$，其中 i,j,k 起着类似 i 在复

数中的作用．实数部分 a 称为“四元数”的数量部分，其余是向量部分．向量部分的 3 个系数是点 P 的笛卡儿直角坐标，i, j, k 是定性的单元，几何上其方向是沿着 3 根坐标轴．

“四元数”进行乘法运算时，乘法的所有代数规则有效，只是在形成 i, j, k 的积时，放弃了交换律，而具备下列规则：$jk=i, kj=-i, ki=j, ik=-j, ij=k, ji=-k, i^2=j^2=k^2=-1$．

1843 年，哈密尔顿在爱尔兰皇家科学院会议上宣告了“四元数”的发明．这是他 15 年思索的结晶，也是他后来 22 年研究的开始．

可见，数学思想一旦冲破传统模式的藩篱，便会产生出不可估量的创造力．哈密尔顿“四元数”的发明，使数学家认识到既然可以抛弃实数和复数的交换性去构造一个有意义、有作用的“数系”，那么，就可以更大胆“自由”地去考虑甚至偏离实数和复数的通常性质的构造．这就打开了进一步通向抽象代数的大门．

上面仅仅是我们教学中的一个例子．虽然同类课程从 20 世纪 90 年代起在部分高师院校数学系陆续开设，也出版了一些教材，但是，我们针对各教材中的种种缺陷，大胆改革，创新构建教材体系，编著出版了《数学方法论与解题研究》一书．这是一本从体系结构到具体内容都富有新意且很实用的教材，被作为全国高师院校数学系教材使用，并被评选为全国教师教育优秀课程资源．

教学实践过程中，改革体现在“先进的教学理念，高效的课堂教学”．(1) 教学理念：以建构主义学习理论作指导，强调“过程学习”．通过对数学发现过程和典型问题的解题过程分析，以学生对数学问题的深刻理解和实质领悟为前提，着力于教学生学会学习、学会分析、学会反思、学会探究．(2) 课堂教学．我们的课堂教学追求 5 个字：“典、深、通、究、根．”典：即所选问题要典型、有代表性，具有一般结构，能够体现深刻的思想方法，便于沟通各种联系．如哥尼斯堡七桥问题、斐波那契数列、汽水问题等．深：即注重对问题深层结构的揭示，注重学生对数学问题的深刻理解和实质领悟，力求高屋建瓴、入木三分．通：即注重多方沟通联系，包括知识与知识间的联系、方法与方法间的联系以及知识与方法间的联系，力求使学生能从多侧面、多角度认识和理解问题．尤其是淡化特技而注重通法、通理的教学．究：即注重对学生探究能力的培养，帮助学生学会在研究中学习、在学习中研究，形成研究问题、探究问题的习惯和意识，教学生学会反思、分析和写作．根：即从知识的根本出发，用最根本的方法，从根源上探究，力求揭示问题最本质的结构．

比如，方程 $y=ax+\frac{b}{x}(ab\neq0)$ 的曲线被许多人称为“对勾曲线”，为了正确认识这一典型问题，我们启发学生考虑以下问题：

(1) $y=x+\frac{1}{x}$ 的图像是双曲线吗？ $y=x-\frac{1}{x}$ 的图像呢？为什么？

(2) 方程 $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$ 表示什么曲线？

(3) 当 $a_1b_1\neq a_2b_2$ 时，方程 $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=\lambda$ ($\lambda\neq0$)表示什么曲线？

(4) 函数 $y=ax+\frac{b}{x}(ab\neq0)$ 与 $y=ax-\frac{b}{x}(ab\neq0)$ 的图像有何关系？

(5) 你能用双曲线定义证明反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图像是双曲线吗？

(6) 试探究等轴双曲线与共轭双曲线的特征．

……

实践证明，经以上探究过程之后，学生对双曲线的认识有了质的变化．这里，“典、深、通、究、根”的“五字方针”起了关键作用．

我们大概都见过下面的两个问题：

例 1　求 $\sin^2 10°+\cos^2 40°+\sin 10°\cos 40°$ 的值．

例 2　若每 3 个空汽水瓶可换到一瓶汽水，那么买 10 瓶汽水最多可喝到多少瓶？欲喝 20 瓶汽水，只需买多少瓶？

例 1 至少有十几种解法．但我们首先应认识到其深层结构，即：

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta)$$

(α,β 为任意角)，或

$$\sin^2\alpha+\cos^2\beta-2\sin\alpha\cos\beta\sin(\alpha-\beta)=\cos^2(\alpha-\beta).$$

……

对例 2 我们则应认识到，其实质是：

已知 $3B=1B+1W$，则 $10B+10W=$ ( ) W，$30W=$ ( ) $(B+W)$．

将其一般化，便得如下的一般模式：

若 $m_1A+n_1B=m_2A+n_2B$，则 $m_3A+n_3B=$ ( ) A．　①

据此，我们可以自如地编拟各种情境的问题．如杂拌糖问题、浓度问题、合金问题等．

更一般地，有：

若 $f(A, B)=g(A, B)$，则 $h(A, B)=$ ( ) A．　②

由此可得更多变式问题，它们可能看起来和例 2 没有丝毫联系．可以说，①②两式才反映了问题的深层结构．

“典、深、通、究、根”的“五字教学原则”为学生搭建了一个有效的学习与研究的平台．抓住了数学知识的魂(数学实质)、数学方法的根，就能够有效地促进学生的有意义学习，以数学本身的魅力吸引学生．长期坚持，对培养学生的科学理性精神和数学素养有显著效果．对“五字教学原则”的追求，以学生对数学问题的深刻理解和实质领悟为前提，着力教学生学会学习、学会分析、学会反思、学会探究，以实现先进的教学理念和高效的课堂教学．经过多年的教学实践检验，证明该项教学改革确实切合中学数学教学实际，深受师范生和教师的欢迎，效果显著．

在教学手段上，我们积极采用基于多媒体环境下的教学设计，更加有利于实现强调过程的教学理念和注重数学方法

论专业素质教育的教学目标，使学生通过发现、探索获得知识，通过归纳、总结得出结论.

3 教改成果的创新点

（1）所编著的教材《数学方法论与解题研究》，立足于数学的创造性思维本质，着眼于学生数学素质教育，从数学的发现、发明与创造本身的一般规则和原理出发，建构数学方法的系统. 另外，在探求解题思路的微观研究和解题理论上，突破了现有的内容，一定程度上超越了已有的教材和专著，从体系到思想观点和方法内容都有一定的创新.

（2）先进的教学理念. 本成果关注的是学生学习的过程和方法，以及伴随这一过程而产生的积极情感体验和正确的价值观. 以建构主义学习理论为指导，提出“过程和方法教学”等先进的教学理念.“数学发现过程和典型问题的解题过程分析”搭建了学生学习的平台；“以学生对数学问题的深刻理解与实质领悟为前提”，抓住了数学的“魂”；而“学会学习，学会探究”则抓住了教学的“纲”. 这是基于问题的教、基于问题的学，在统揽知识面的基础上，找出结点，以点带面，引导教、引导学、探究式、研究型.

（3）提倡高效率课堂教学，凝练出“典、深、通、究、根”的“五字教学原则”. 这样的课堂追求，从根本上吸引了学生、淡化了技巧，使数学学习成了真正的有意义学习，并在一定程度上培养了学生的科学理性精神.

（4）通过数学方法论的教学，渗透数学的文化价值，综合培养学生的认识论、价值观和方法论，突显了师范教育的专业素质目标，使学生的专业素质有显著提升.

[参 考 文 献]

[1] 张雄，李得虎. 数学方法论与解题研究[M]. 北京：高等教育出版社，2003.

[2] 罗增儒. 数学解题学引论[M]. 西安：陕西师范大学出版社，1997.

[3] 张顺燕. 心灵之花[M]. 北京：北京大学出版社，2002.

[4] 朱小蔓. 建设高素质教师队伍亟待解决的三个问题[N]. 中国教育报，2007-09-06（4）.

[5] 王光明. 数学教学效率论[M]. 天津：新蕾出版社，2006.

Normal School "Mathematics Methodology and Problem Solving Research" Curriculum Significance and Educational Reform

ZHANG Xiong[1,2], CHEN Huan-bin[2], HUANG Yun-peng[2]

(1. College of Educational Science, Shanxi Normal University, Shanxi Xi'an 710062, China;

2. Department of Mathematics, Shanxi Institute of Education, Shanxi Xi'an 710061, China)

Abstract: "Mathematics Methodology and Problem Solving Research" was in mathematics teacher specialized knowledge structure an indispensable part, was mathematics teacher specialization need to develop, implemented the need which the elementary education mathematics new curriculum reforms, was mathematics education for all-around development need. The curriculum content embarks from mathematics creative thought essence, elaboration mathematics discovery and mathematics problem solving general rule, principle and method. The educational reform had provided a development mathematics education for all-around development platform for the student, The synthesis raises student's epistemology, the values and the methodology, suddenly had revealed the pedagogical education specialized quality goal, enable student's specialized quality to had the remarkable promotion.

Key words: teacher education; specialized quality; mathematics methodology; problem solving research; teaching material construction; educational reform

[责任编校：陈汉君]

第17卷第2期 数学教育学报 Vol.17, No.2
2008年4月 JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION Apr., 2008

中德两国标准中的"数学能力"比较研究

苏洪雨[1, 2]，徐斌艳[2]

（1．华南师范大学 数学科学学院，广东 广州 510631；2．华东师范大学 课程与教学研究所，上海 200062）

摘要：我国的数学课程注重知识体系，也加强了数学能力发展；而德国教育特别重视数学能力，其数学教育标准以能力为主线，知识为载体．德国的数学教育标准是以能力为导向，而我国的课程标准以知识为导向．我国的能力标准抽象，德国的能力标准比较具体，便于操作．在课程标准的制订过程中，应做到：知识能力，齐头并进；化形为体，注重系统；划分层次，合理评价．

关键词：知识；数学教育；数学能力；比较；水平

中图分类号：G40-059.3 文献标识码：A 文章编号：1004-9894（2008）02-0074-04

1 背 景

数学教育的目的就是培养学生的数学素养．对于数学教学来说，其根本意义，在于发展了人的本身[1]．张奠宙教授指出："用数学的立场、观点、态度和方法去处理成人生活、经济管理和科技发展中的理论和实际问题．"[2]"国际学生学业评价项目"（PISA，The Programme for International Student Assessment）认为：数学素养是一种个人能力，学生能确定并理解数学在社会所起的作用，得出有充分根据的数学判断，并能够有效地运用数学；数学素养是具有建构性的、关心他人和有思想的公民，适应当前及未来生活所必需的数学能力[3]．数学能力作为数学素养的一个重要方面，一直以来是人们关注和研究的重点，从早期的行为主义者桑代克到近代的教育心理学家克鲁捷斯基，都对"数学能力"做了深入的研究．在我国，从1963年到1996年，中学数学教学大纲把运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力，运用数学知识来分析和解决实际问题的能力作为基本的"数学能力"．

但是，不同的国家，对于数学能力有着不同的定义和要求．从学校数学教育来看，我国数学教学的重点是以数学知识为导向．尽管随着课程改革的不断发展，研究性学习、探究式学习等注重学生能力的教育形式逐步增多，但是在数学教育评价方面，尤其是中考、高考这些大规模的选拔性考试中，强调的依然是对数学知识的掌握，对于数学能力的考查占了较小的比例．

在2003年的PISA测试结果中，德国的数学素养成绩不够理想，这引发了对教育质量的大讨论，导致了教育政策的重点改变，其中之一就是颁布德国全联邦性质的教育标准，相当于我国的课程标准．2003年以来，德国的文化部长会议（KMK）已经颁布针对十年级的德语、数学以及英语教育标准，并要求从2005年起各州按照相应的教育标准测量学生的学业成绩，评估学校的教育质量．这些教育标准以"能力"为导向，其中"能力"是指"学生拥有或者学到的、能够解决特定问题的认知技能与技巧"；是指"学生具备的在变化情境中成功并负责地利用问题、解决问题的相关能力"[4]．同时，我国的《普通高中数学课程标准（实验）》也推进数学能力的发展，在原来的数学教学大纲提出的几大能力的基础上，增添了新的内容．例如，数据处理能力、数学交流能力、提出问题的能力等．然而，我国课程标准和德国的教育标准在"数学能力"的范畴、要求和解释等都有着明显的不同．德国的数学教育标准是以能力为导向，而我国的课程标准，虽然对数学能力提出了新的要求，但是从课程标准整体观察，依然是以知识为导向．因此，比较两个国家在"数学能力"方面的设计，可以互相借鉴和补充．

2 关于"数学能力"的范畴设置比较

《普通高中数学课程标准（实验）》是我国中等教育的纲领性文件，不仅指导着中学数学教学，也是编写数学教材的依据，还是数学教育评价的标准．同样地，德国全联邦性教育标准也有着类似的功能："引导"和"评价"．引导，帮助教师、学生、家长以及管理人员明确标准规定的能力要求，并且认清标准的客观性以及约束力；评价，标准是检验学生成绩的基础，是学生学业能力发展的保障．德国要求针对十年级毕业生，学校需要按照教育标准设计问题，评价学生是否达到所要求的学习目标以及能力水平．

在我国的高中数学课程目标中，主要提出了基本数学能力和进一步能力要求；在课程的基本理念中，重点强调了"数学思维能力"，倡导学生进行"数学探究"和"数学建模"等学习活动．德国的数学教育标准是一个比较典型的能力导向标准，包括3个维度：过程、内容和水平要求．其中，过程维度描述宏观的数学能力，内容维度描述与数学核心概念相关的具体能力，水平要求维度描述数学能力的各个不同水平．中国《普通高中数学课程标准》中的"数学能力"包括基本能力、进一步能力和数学思维能力，其中基本能力包括运算求解能力、抽象概括能力、推理论证能力、空间想象能力、数据处理能力；进一步能力包括数学地提出、分析和解决问题的能力，数学表达和交流能力，独立获取数学知识的能力；数学思维能力包括直观感知、观察发现、归纳类比、空间想象、抽象概括、符号表示、运算求解、数据处理、演绎证明、反思与建构等思维能力．德国《数学教育标准》中的基本能力包括数学论证能力，数学地解决问题的能力，数

收稿日期：2007-12-18
基金项目："上海市浦江人才计划"资助项目——国际视野下的学生数学素养研究（沪2005105）
作者简介：苏洪雨（1977—），男，山东汶上人，博士生，主要从事数学课程和数学论研究．

学表征的应用能力，数学符号、公式以及技巧的熟练掌握能力，数学交流能力；进一步能力只有数学建模能力．

中国课程标准中的“数学思维能力”蕴含在基本和进一步的数学能力之中，是课程的基本理念之一．基本和进一步的数学能力是高中数学课程目标的总体要求，这些能力通过具体的数学内容和数学活动（数学探究、数学建模等）来体现．我国的《普通高中数学课程标准（实验）》以内容标准为主，在内容标准的陈述中，数学能力是以“内隐的”形式存在，而没有具体形象地描述出来．

德国的教育标准提出了 6 大宏观的“数学能力”，这些能力结合数学内容，按照数学核心概念（数、测量、空间与形状、函数关系以及数据与随机现象）领域对数学内容进行划分，学生在学习和处理不同的数学内容时，进行不同的数学活动，因此有着不同的认知活动要求．根据不同认知的要求，标准将宏观的数学能力分为 3 个不同的能力水平：再现内容，建立联系，概况与反思．

3　关于具体的“数学能力”比较

我国的数学课程标准和以往的数学教学大纲相比，在数学能力要求方面有了更新的诠释．从多年的“三大数学能力”（运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力）发展到现在的：空间想象、抽象概括、推理论证、运算求解、数据处理等能力，还有数学地提出、分析和解决问题能力，数学表达和交流能力，独立获得数学知识的能力．在课程的基本理念中，重点强调了“数学思维能力”．德国数学教育标准是在 PISA2003 之后反思教育的结果，这是德国首次颁布全联邦性质的教育标准，主要设计了能力标准．由于两国在课程设计的理念和实际教学情况等各方面都有所不同，因此，在各个能力的要求、设计形式、具体描述等方面，各有特点．我们试图从两者关于能力描述、水平要求和能力实例 3 方面来比较，但是我国的课程标准没有对数学能力水平要求进行细致的划分，所以多维度的比较有一定的困难．因此，我们将从两者相似之处进行比较，然后再比较其余的部分．

3.1　“推理论证能力”对“数学论证能力”

在我国的数学课程标准中，“推理论证能力”既包括演绎推理（或逻辑推理），还包括数学发现、创造过程中的合情推理，如归纳、类比等合情推理．标准更加注重了公理体系的来源、形成，从特殊到一般的过程，特殊之间的类别过程．这些过程是命题和猜想形成、数学创造的过程．

德国的数学教育标准是为了评价学生数学能力水平．所以它对“数学论证能力”有着较为详细的描述，包括其内涵、水平层次和实例．“数学论证能力”由 3 方面组成：① 数学思想与数学逻辑证明结合；② 能理解并批判性地判断各种形式的数学论证；③ 能认识到某些不依赖具体内容的数学证明方法的普适性，它分成 3 个水平：能够重复并应用常见的论证过程（利用已知的定理、方法以及推论），会给出简单的运算或证明，用日常知识进行论证；理解、阐述或提出直观的多步骤论证过程；使用、阐述或提出复杂的论证过程，依据关于适用性、逻辑性等标准判断各种不同的论证方法．

尽管两者表述不同，可是内涵基本相似：中国的“标准”还强调了合情推理；德国的“标准”注重了学生的批判精神，并给出水平层次．

例 1（中国）探求凸多面体的面、顶点、棱之间的数量关系（欧拉公式的发现）．

此例要求学生利用归纳和类比进行合情推理．

例 2（德国）（相邻数之和）：小吉认为：“三个相邻的自然数相加之和能够被 3 整除．”小吉有道理吗？论证你的答案．

这是一个“水平二”基准的问题，学生可以用不同的数学方法来论证，如举例法、代数法、图示法、描述法以及循环法等．

3.2　“数学地提出分析和解决问题的能力”对“数学地解决问题能力”

在我国的“标准”中，着重强调“提出问题”，因为这是我国数学教育中的一个薄弱环节[5]．“标准”将“数学探究、数学建模、数学文化”贯穿于整个高中数学课程，渗透或安排在每个模块或专题中，从而培养学生数学地提出、分析和解决问题的能力．

在德国的“标准”中，问题解决能力是指：拥有适当的数学策略去发现问题解决思路或方法，并加以反思．策略不仅包含数学算法的使用，还包括各种数学原则和辅助工具的使用．同样地，“问题解决能力”分为 3 个水平：通过辨析以及选择某个容易想到的策略，解决某个简单的数学问题；通过多步骤的策略性方法找出问题解决的途径；构建一种精制的策略，进行完整的证明，或者概括出某个结论，反思检验各种不同的解决方案．

中国的“标准”将“问题解决能力”隐含于其它数学活动中，潜移默化地培养学生的能力；德国“标准”中的能力都是显性的，在此能力要求上，提出了进行反思的能力．

3.3　“数学表达和交流能力”对“数学交流能力”

我国的“标准”认为，数学交流是指用数学语言来传递信息和情感的过程．交流与表达是密不可分的，在交流中，可以更好地理解和使用数学语言和符号，促进数学思维，拓展知识．数学交流在数学学习和数学活动中是必不可少的能力．

德国的“标准”对此能力有更加深刻的认识：它包括对文本的理解或者数学的语言表达，也包括对数学思考、解决方式以及结果的清晰的书面或口头表达．数学交流能力一方面能够接受数学事实、理解数学事实或判断数学事实；另一方面会表达数学事实，因此对认知有很高的要求．同样，它也有 3 个水平：表达简单的数学事实；从简短的数学类文本中识别并选择信息；理解地表述数学解决方法、思考以及结果，解释他人对数学类文本的说明（正确的或错误的），从数学类文本中识别和选择信息（信息的复杂程度不直接对应数学运算的难度）；设计能完整呈现某个复杂的解决与论证过程的方案，领会复杂数学类文本的意义，比较、评价并纠正他人的理解．

我国的数学课堂一直注重“数学交流和表达”，例如，课堂提问、小组讨论等．在“标准”中，提倡更多的交流形式：让学生尝试着提出问题，让学生陈述某个定理、结论的发现过程或证明过程，作一个读书报告，写一篇小论文，在

小组讨论、交流的基础上，各组对某个问题展开辩论等方式，培养和发展这一能力．德国不仅强调口头的交流，还包括书面的，还要表达、理解和判断数学事实．涉及到更高的认知问题，还有问题解决的能力．

3.4 关于其它能力的比较

在我国的“标准”中，还有几个重要的数学能力，分别是：空间想象能力、抽象概括能力、运算求解能力、数据处理能力，以及独立获取数学知识的能力．其中的“空间想象能力”和“运算求解能力”是我国数学教学中一直强调的能力，“标准”对两个能力都有新的发展，建议通过“直观感知、操作确认、思辨论证、度量计算”，培养和发展学生的空间想象能力；对于“运算求解能力”，多了估算能力、使用计算器和计算机的能力、还有求近似解的能力等方面的要求．德国的“标准”中没有提出这两个能力，但是在其它能力中，渗透了“空间想象能力”和“运算求解能力”，而且在“数学符号、公式以及技能的熟练掌握能力”中，强调了数学符号与公式的使用或者数学技能技巧的应用，包括的元素有：数学定义、规则、算法或者公式的认识和应用；变量、项、等式或者函数的形式化应用；按照特定步骤，检验答案与过程；几何基本构造的利用；辅助工具的使用，如公式表或计算器．可以看出，德国的“标准”也包含数学运算求解能力．同样，这个能力也分为3个水平，限于篇幅，在此不再赘述．

“抽象概括能力”和“数据处理能力”是我国“标准”中新加的两个基本能力，这不仅是数学本身、数学学习的需要，也是现代社会对未来公民基本素养的要求．在现代社会中，信息资源丰富，如何从庞大的信息中获取有用的知识，或者了解基本的情况，都需要进行抽象概况；同时，数据在现在的生活中日益重要，处理数据是我们工作、生活中必不可少的环节，我国的“标准”提出这两个能力，实际上是“与时俱进”的表现．德国的“标准”提出“数学表征的应用能力”，不仅会自己提出对数学对象的表征，而且理解性地应用已经给出的数学表征．这里除了图像表征形式，例如示意图、插图、照片、真实事件的草图、统计图表等；还有其它的表征，如公式、语言表征、动作（身体）语言、程序语言等．这个能力也分3个水平，含有抽象概况的意义，但是更加强调的是“表征”，不仅能提出表征，例如图表说明的数学模型，而且还要能够“清晰地解释或者改变给出的数学表征，转换不同的表征形式”．水平三的要求更高，理解并应用不熟悉的数学表征，针对问题制作自己的表征形式，有目的地评价各种不同的表征．

除了上述的能力之外，我国“标准”提出“发展独立获取数学知识的能力”，针对我国现阶段学生被动学习，不知道主动探究和发展数学问题的现象，提出这一个能力有着积极意义．但是，这样的能力在德国标准中没有特别提出，或许是因为德国学生自主能力较强，在数学学习过程中，独立获取知识是自然而然的过程．

在德国的“标准”中，还包含“数学建模能力”．它认为，数学建模过程是用数学方法去理解现实相关的情景，提出解决方案，并认清和判断现实中的数学．“标准”重点强调了“数学模型”，它是“关于现实的简洁的数学表征”．在我国的“标准”中，没有提出数学建模能力，然而，数学建模是高中数学教育中重要而基本的内容．对于培养学生自主学习和问题解决都有很好的帮助．同样地，德国的“标准”将数学建模能力分成3个水平．它设计的数学建模过程如图1．我国的“标准”使用框图表示“数学建模”的过程如图2．

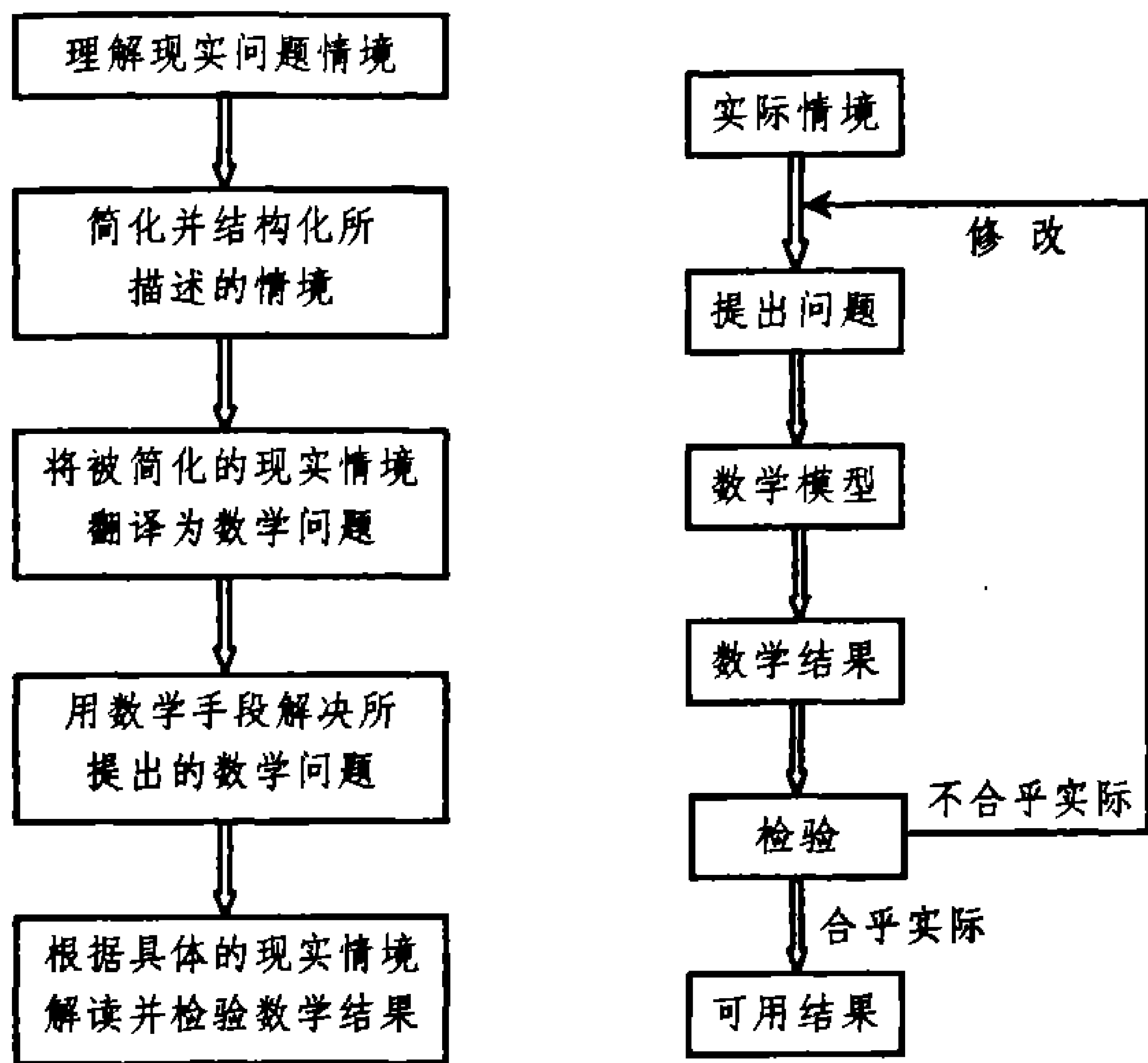


图1 德国数学建模过程　　图2 我国数学建模过程

“培养学生数学思维能力”是我国数学课程的基本理念之一，同时也是数学教育目标之一．发展学生的数学思维能力有利于学生的智力发展和数学能力的提高．但是，数学思维能力的培养是以数学课程内容和数学能力为基础的．因此，数学思维能力是在学习过程中得到体现和发展的．德国的“标准”没有提出数学思维能力，在“数学表征”、“数学论证”等能力中蕴含着发展学生数学思维的含义．

4 结论与启示

从上述比较看，我国的数学课程标准和德国的数学教育标准在“数学能力”方面，有着很大的不同：这种不同是由于两者不同的功能所导致的，同时也和两国的数学教育传统有着很大的关系．总体来看，我国注重知识传授，德国注重学生的能力培养．

4.1 知识能力 齐头并进

尽管我国的数学教育多次强调要注重学生的数学能力培养，可是从课程标准来看，依然以“知识”为主线，“能力”为副线．当然，“能力”必须以“知识”为依托，才能体现出来．但是，从数学课程标准的教育目的来说，我们不仅要强调学生应该学习什么样的数学知识，还要对学生在学习过程中所必需的数学能力阐述清晰．在《普通高中数学课程标准（实验）》中，关于“数学能力”的表述只有在“课程目标”中，通过概括的语言描写，对于每一种“数学能力”的内涵、要求和操作等，都没有提出；在具体的内容标准中，关于“数学能力”的要求相对较少，即使提到“数学能力”，也是比较笼统的要求．

相反，德国的数学教育标准中，不仅对每种“数学能力”做了详细阐述，包括3个维度：过程、内容和水平要求．每个能力分为3个水平，对每个水平的能力，通过具体的数学

案例来加以说明．在表述能力的同时，也没有忽略数学知识的重要性，因为知识和能力是并行的．

在我国的课程标准中，需要再加强对“数学能力”的研究和表述，从而使知识与能力齐头并进，而不致于最后在课程实施中导致偏差．

4.2　化形为体　注重系统

从两个标准的结构来看，德国在“数学能力”方面，更加具体、细致，并且十分系统化．这主要是由它的教育导向所决定的，德国一向强调“能力”．而对于我国在数学能力培养方面，略显不足．我们更加注重的是知识．本杰明·富兰克林在18世纪时提到：“如果能把一切有用的知识都教给学生，该多么好啊！可惜知识是无穷的，而学生的时间却是有限的．”[6]知识是一个载体，在这个载体上，我们更加注重的应是学生的“素养”，就是脱离了知识而给学生终身受用的能力．

然而，我国的课程标准在“数学能力”表述方面，却是抽象的，而且是零散的．在课程的基本理念中有“数学思维能力”，在课程目标中有“基本能力”和“一般能力”，但是在内容标准中，“数学能力”偶尔出现，却是分散的，断断续续的．对于能力的描述，都是抽象的，不能结合具体的案例来进行阐述，对于教学和学习的把握都有些难度．笔者以为，“数学能力”应该从“形式”的抽象，化为可以操作的“具体”实施，同时，注重整体和局部的、连贯的、系统的设计，从而有利于指导教学，培养学生能力．

4.3　划分层次　合理评价

培养学生良好的数学能力，还要有一个合理的能力评价标准．在德国的数学教育标准中，每个数学能力分为3个水平，每个水平都有具体的描述，这对于评价学生的数学能力水平，有着积极的指导意义．对于学生学习的评价，我国的课程标准描述得过于笼统、抽象．例如，“数学学习评价，既要重视学生知识、技能的掌握和能力的提高，又要重视其情感、态度和价值观的变化……”[7]但是，对于评价的具体操作，标准没有给出．

对学生进行合理评价，需要对“数学能力”做出不同水平层次的描述．在每个层次，学生应该达到怎样的数学能力水平，这对于进一步提供学生的学习，以及教师改善数学教学，都有着很好的参考价值．

我国的数学课程标准在知识体系上，明显优于德国的标准．因为德国特别重视能力培养，所以在对“知识”描述方面，就显得不是那么系统了．这主要还是因为两个标准的目标不一样而导致的．

[参考文献]

[1] 郭思乐．数学素质教育论[M]．广州：广东教育出版社，1990．

[2] 张奠宙．数学教育研究导引[M]．南京：江苏教育出版社，1998．

[3] OECD. Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy [W]. A Framework for PISA2006, http://www. pisa. oecd. org/pages/.

[4] Weinert F E. Leistungsmessung in Schulen [M]. Weinheim und Basel: Beltz, 2003.

[5] 严士健，张奠宙，王尚志．普通高中数学课程标准解读[M]．南京：江苏教育出版社，2004．

[6] 布鲁纳．教育过程[M]．邵瑞珍译．北京：文化教育出版社，1982．

[7] 中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准（实验）[M]．北京：人民教育出版社，2003．

Comparison of Mathematical Competence in the Mathematics Education between Chinese and German Standards

SU Hong-yu[1,2], XU Bin-yan[2]

(1. Department of Mathematics, South China Normal University, Guangdong Guangzhou 510631, China;

2. Department of Curriculum and Instruction, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: It was important for Chinese mathematical curriculum to develop a knowledge system, also the development of mathematical competence was strengthened; However, German education thought much of mathematical competence specially, and gave priority to the competence on mathematics education. Though two standards both emphasize mathematical competence, lots of their competences were similar; there were some differences on the component and criterion. Chinese competences were abstract to understand, German standard was visual. Thus, Chinese mathematical curriculum standard should paid more attention to the competences' developing and embodiments, which would be helpful to assess students well.

Key words: knowledge; mathematics education; mathematical competence; comparison; level

[责任编校：陈汉君]

美国对近代中国数学教育的帮助与影响及启示

李伟军

（内蒙古师范大学 数学科学学院，内蒙古 呼和浩特 010022）

摘要：19世纪中叶，中国出于富国强兵的需要，全国开始了创办现代学校教育的运动，数学教育的现代化也由此开始．美国由于其在世界上的杰出数学成就，成为中国学习的榜样之一．早期的教会学校和教会大学模仿美国数学教育的课程与教育模式，一批熟悉西方教育体系的美国传教士在中国的学校教书并参与管理，发挥了奠基的作用．庚子赔款及由此带来的近40年的向美派出留学制度，使得中国近代一大批教育精英及数学人才得以培养，这批留美学生在中国数学教育的现代化中做出了杰出贡献．美国学术与教育界从多个方面给予了中国数学界以支持与帮助，中国的数学教育才得以快速转向，现代数学教育在中国扎根、开花、结果．与先进国家保持交流和开放是数学教育发展的必要条件．

关键词：美国；数学教育；传教士；庚子赔款

中图分类号：G421　文献标识码：A　文章编号：1004-9894（2008）02-0078-07

一个半世纪前，历史给了中国一个“机缘”，整个国家被迫纳入“世界体系”，开始了大规模的中西文化对接，走上了向西方学习的道路．西方数学作为西方文化的重要组成部分，也被中国大规模地吸收、移植、培育、发展．一百多年来，经过几代人的艰苦奋斗，已取得丰硕成果，数学已成为中国学校的主要课程，中西方数学知识差距已逐步缩小，有的领域中国已居于世界前沿，一大批中国数学家的创造性的成果引起国际瞩目，中国学生在国际数学大赛中屡屡夺标，现代数坛中中国人的名字熠熠生辉．综观这一历史进程，是多种因素综合作用的结果，但美国在其中发挥了巨大的推动与促进作用，中国现代数学教育体系的建立，数学高端人才的培养，无不得到美国数学界的帮助、支持与影响．中美数学教育交流源远流长，是中美文化交流的重要组成部分，是中美两国人民友谊的成功典范．对这一历程进行梳理与回顾，对我国当今的数学教育不无启示．

传统的中国文化中，儒家思想占统治地位，孔孟之学是教育的主体内容，学而优则仕是教育的基本取向．数学在主流文化中并无地位，一直处于六艺之末，与各种能工巧匠并列一起，只可兼通、不可专业，“古人未闻有靠数术之人能振国兴衰”（清大学士倭仁反对设立算学馆之语）是这一观念的集中体现[1]．然而晚清在与西方列强的战争中一败涂地，给当时的朝野与知识分子以极大的震动．面对西方的坚船利炮，何以强国？开明改革派认为我国的科举教育只重人文而忽视科学是导致国家科学与技术全面落后的主要原因，向强敌学习是改变中国落后的唯一方法．而数学在振兴国家、兴建文明、培育人才中具有无可辩驳的价值．闽浙总督英桂、沈葆浈进奏：水师之强弱，以船炮为宗，炮船之巧拙，以算学为本，西人制器之法，无不由度数为生[1]．晚清的重臣恭亲王认为：西方的坚船利炮，起源于盖于西人制器之法，西人十岁无人不学算，今欲采西学，自不可不学算[1]．数学的价值得到了官方与主流文化的承认和重视，在改革教育体制废科举、兴学堂中，放弃中国的传统数学，植入西方现代数学得到官方的认同与支持．

美国是一个没有经历古代社会的年轻国家，在其独立之前，其教育完全仿照英国的教育体系，主要向欧洲学习数学．独立后，美国的工商业迅速发展，学术研究也快步向欧洲看齐．到1862年，美国的哈佛大学、哥伦比亚大学已发展成为重要的学术中心．到19世纪末，美国的数学教育与学术成果已引起世界的注目．Benjami是代表人物之一，作为哈佛大学的数学教授，他写的《线性组合代数》受到欧洲数学家的重视．耶鲁大学教授Gibbs在1901年出版了一本名为《统计力学中的基本原理》的著作，创立了近代统计理论及其研究方法，奠定了这个数学分支的基础，被公认为统计力学的开山鼻祖．此外，Sylrester创办的《美国数学杂志》、维吉尼亚大学在1884年出版的*Annals of Matheatics*也享誉世界数坛．到20世纪初，美国已涌现了一大批为世人瞩目的数学家，如Rrmoore、Dickson、welyl、Birkhoff等，他们为美国成为20世纪数学中心打下了基础．而美国之所以能介入中国的数学教育并产生影响得益于当时美国政府采取的较为明智的文化交流政策．面对中国这样一个有着古老文化传统而又较为保守的文明古国，怎样使其文明提高，得到其人民的友谊，又实现其经济利益，美国政府提出了文化接触政策．美国伊里诺大学校长詹姆士给美国总统的一个备忘录中写道：“哪一个国家能做到教育这一代年轻的中国人，哪一个国家就将由于在这方面所付出的努力，而在精神和商业的影响上取回最大可能的收获……为了向这种精神努力

收稿日期：2007-12-03
基金项目：内蒙师范大学教育专题科研课题——数学校本课程研究（JNYSZ-0627）
作者简介：李伟军（1961—），男，内蒙古察右后旗人，副教授，硕士生导师，主要从事数学课程与教学论研究．

的扩大而花了一些钱，即使从纯粹的物质意义上说，也比用任何其它办法收获得更多，商业追随受道德和精神的支配，比追随军旗可靠得多."[2]这种文化上的交流远见，顺从了中国富国强兵的需要，对促进中国现代数学教育的发展提供了外部环境，为中国向美国学习数学提供了契机.

1 美国传教士与教会学校对中国近代数学教育的介入

西方文化在中国的早期传播主要以西方传教士在中国的传教活动为依托，传教与科学教育不可分离是很多传教士的共识，美国长老会传教士狄考文曾说：所有伟大的科学发现都是上帝恩赐给基督教国家的……（科学）是上帝特别赋予教会去打开异教邪说的大门的工具和争取人们信仰的手段[3]. 传教士在中国办了很多的小学与中学，到 19 世纪末，教会办的中小学已有两千多所，学生四万人，占当时中小学生总人数的百分之十[4]. 这些教会学校不同于中国传统的以尊孔读经考科举的学堂，在传教的课程外还有相当多的课程传播自然科学，数学是中小学生的必修课程之一，从小学开始学习算术、代数、几何，教会学校使得西方数学在中国人的初等教育中有了一席之地[5]. 进入 20 世纪，中国兴起了办大学教育的热潮，大学作为区别于中国传统教育的舶来品，聘请熟悉西方大学教育体系的外国人教书并参与管理工作是解决人才短缺的办法之一. 很多美国传教士由于在文化界影响巨大，受到清政府的重用. 丁韪良（William A. P. Martin，1827—1916），美国传教士，耶鲁大学法学博士，1850 年来中国开展传教活动. 他积极介入中国的文化、政治、教育活动，有多部影响很大的著述出版，成为当时精通中西文化的名人之一. 1862 年清政府兴办了我国第一所学习西方知识的教育机构——京师同文馆（北京大学前身），1867 年聘美国传教士丁韪良任教. 后又任京师大学堂（北京大学前身）西学总教习，前后长达 25 年之久. 曾任京师大学堂编书局分纂的罗惇曧早在 1912 年就在《京师大学堂成立记》一文中对丁韪良在同文馆和北大的作用有过分析："刘可毅、骆成骧等为教员，盖员司多用翰林也. 美国传教士丁韪良为总教习. 实权皆在丁韪良，科学课程管学不能过问. "[6]他相当于校长，主持了同文馆的课程设置. 根据光绪二年（1876）公布的八年课程表[7]，天文算学馆之数学课程主要有：数理启蒙、代数学、几何原理、平三角、弧三角、微分积分、航海测算、天文测量，完全是西方数学的内容. 北京大学图书馆善本特藏部至今还保存着一套由丁韪良主持编译，并由京师大学堂于 1899 年出版的理科教科书，即七卷本的《重增格物入门》. 该书内容充实，印刷精美，图文并茂，颇能说明戊戌年大学堂的教学质量和丁韪良本人的业绩. 丁韪良在序言中对于数学与应用的辩证统一关系有下面这番精辟的论述：

盖格物与算学互为表里，独知算学而不及格物，则虚而无凭；习格物而不明算学则狭而不广，二者相辅而行方能钩深致远……欲阅是书宜通晓算学，因书中皆用算学诸理以推物力，意在用算而不在讲算也. 除几何、形学、勾股、代数常用外，其微分、积分亦恒有不得已而借用者[8].

此外，中国最早创办的 3 所大学，也对传教士委以重任，借外国智力为我所用. 1895 年盛宣怀创办天津北洋大学，其第一任总教习是美国传教习丁家立（C. D. Tenney，1857—1930），1897 年盛宣怀又创办了上海交通大学，聘请美国传教士富开森（J. C. Ferguson，1866—1945）为第一任监院（相当于校长），1897 年成立了浙江大学（前身求实书院），成立之初请美国人王令庚（E. L. Mattox）为西学总教习. 毕业于北洋大学的著名科学家李书田多年后回忆丁家立的贡献："创设伊始，延聘美籍名教育家博士为总教习，课程编制，讲授内容，授课进度，教科用书，均与美国东方最著名之哈佛、耶鲁等大学不相伯仲，而蔚为东方名学府者，皆丁先生之功也. "[3]进入 20 世纪，教会大学有了很大发展. 据 1918 年统计，重要的教会大学 15 所，其中 10 所由美国教会创办，4 所由英国、美国教会联合创办[9]，这些大学理、工、农、医均占了一定的比例，西方数学作为理工科的必修课成为这些大学的基础课. 教会大学一样注重学术研究，有的还办出了有名的数学系，为中国培养了很多数学人才，如教会大学燕京大学数学系，教学质量在当时的大学中名列前茅. 我国现代控制理论的创建者、控制理论学家、数学家关肇直，1941 年毕业于燕大数学系. 1949 年燕京大学数学系并入北大数学系，加强了这些学校的教学力量. 燕大数学系主任符献瑜任计算数学教研室主任，在新中国的计算数学上做出了突出成果. 1949 年之前，美国传教士介入了各个层次的数学教育，为中国数学教育树立了样本，为数学在中国教育中的地位确立与巩固做出了贡献.

2 庚子赔款与留美学生在创建现代数学教育中的贡献

"植才异国，输入文明"是近代中国追求现代化的得力措施之一，而最早接受中国留学生的西方国家是美国. 中国近代第一个留学外国的学生是容闳（1828—1912，广东香山县人），他是美国第一个来华办学的传教士塞纽尔·布朗（S. R. Brown）博士所办的马礼逊学堂的第一批学生之一. 1847 年，塞纽尔·布朗带容闳到美国求学. 容闳 1854 年取得哈佛大学文学学士，是近代史上第一位毕业于美国高等学府的中国留学生. 作为接受西方教育的第一人，他亲身感受了西方的物质与精神文明，他认为改革和复兴中国最切实可行的办法，"籍西文明之学术以改良东方文化，必可使老大帝国一变为新中国"[10]. 容闳于 1867 年在《予之教育计划》里集中论述了关于留学教育的问题，提出"政府宜选派颖秀青年，送之出洋留学，以为国家储蓄人才"，履次建议派遣幼童留学. 1872 年清政府接受了容闳的建议，派 120 名幼童分 4 批赴美留学，开启了中美两国教育交流的先河. 后因历史、文化、政治等方面的原因，1881 年清政府中途撤回了

留美幼童，但留美幼童以后在晚清的政治、经济舞台上发挥了很大的作用，使清政府认识到美国教育成绩优佳，一改过去的政策，对留美教育给予支持，逐渐形成了一股官费、自费留美的热潮．1902年，八国联军侵入北京，清政府被迫鉴订了《辛丑条约》，规定了中国赔偿四万五千万两白银，美国得款百分之七，后中美有些人士认为，赔款超出了美国的损失部分，应将超出部分退还中国，经过驻美公使梁诚(留美幼童)的交涉，美国首先退还庚款，并由两国协商，将这笔钱作为支持留美人才的费用．中国政府用这笔钱办起了清华学堂，培养准备赴美深造的学生，庚款为留美经费提供了资金保障，中国向美国主动地学习数学由此开始．从此，中国一批现代数学人才得以培养．

在早期留美幼童中，主攻应用科学和文科为多，没有人成为杰出的数学人才，真正的留美学生在中国数学教育中发挥作用的第一人是秦汾．秦汾（1882—1973），江苏嘉定人，1903年考入北洋大学，1906年赴美入哈佛大学学习天文数学，同学中学习数学的还有官费留学生胡敦复、郑之蕃．1913年，秦汾在美国哈佛大学获得硕士学位，成为第一个获得数学硕士学位的中国人，回国后应聘到北京大学任数学教授、理科学长，1917年数学教授会成立时，当选为该会首任主任．1917年，秦汾与同事一起制定了北大数学系完整的教学计划，公布了《改订理科课程案报告》，共计开设了29门课，建立了较为完善的数学人才培养课程体系．主要课程有：解析几何（立体）、微积分、物理与物理实验、化学与化学实验、函数论、微分方程与调和函数、近世代数、近世几何、理论物理、群论、数论、线几何学、数学史和外国语，还规定了一些选修课．秦汾开设近世代数、天文学、天体力学等，都是我国第一次开设的课程．1918年7月16日，北京大学公布研究总章，数学系成立了研究所，规定凡本校科毕业生及本校数学门二、三年级学生均可入研究所研究．秦汾负责指导近世代数，另一位留美硕士王仁辅指导近世几何．他们还积极支持学生开展数学研究，支持他们组织数理学会，创办刊物以扩大学生的视野．秦汾在几何代数方面发表了不少文章，编写出版了《三角学》、《新中学代数学教科书》、《天文学之算术》、《解析几何》等教材，被很多中学采用，他们为我国早期的数学教育和研究做了大量奠基性的工作[11]．

1930年，北大由蒋梦麟（1886—1964）任校长，北大数学系的发展进入了一个新时期．蒋梦麟，浙江省余姚县人，1903年中了秀才，1908年8月赴美留学，1912年于加州大学毕业，随后赴纽约哥伦比亚大学研究院，师从杜威，攻读哲学和教育学．1917年3月，蒋梦麟获得哲学及教育学博士学位后回国，1919年被聘为北京大学教育系教授，并帮助蔡元培处理校务．蒋梦麟从1919年到1945年期间在北大工作了20余年，是北大历史上任职时间最长的校长．作为一个拥有美国大学教育博士学位的校长，美国大学的理念、制度和做法成为他治校的借鉴和资源．他将学术事业视为高等教育的唯一生命，坚持学术自由，维护学术尊严，努力营造良好的学术氛围．他协助蔡元培确立了一套比较有效的管理体系，以美国的大学为蓝本，以教授治学为目标，设立“研究教授”，推行“专任教授制”，实施资助助教留学和教授休假制度，改善教师的教学和学术研究条件．1924年，美国退还了其余的1/3庚款余额．为此两国商定，成立“中华教育文化基金董事会”（简称中华基金会），蒋梦麟身兼中华基金会副董事长，在蔡元培、胡适的帮助下，获得100万款项资助，使北大的改革与聘请名师有了财政基础．他对学风与教风大力整顿，1931年重新聘请了理科教授，延揽了一大批留美博士来学校任教．江泽涵、刘晋年、申又枨等一批留美博士就是这时进入北大数学系的．江泽涵（1902—1994)，安徽省旌德县人，南开大学数学系毕业，1927年夏，通过清华大学留美专科生的考试，考取了那年唯一的学数学的名额，并于当年赴美，在哈佛大学数学系攻读博士学位．在哈佛大学向微分拓扑学家莫尔斯（M. Morse，1892—1977）学习莫尔斯临界不等式理论，研究多重连通域及3维情形，获得了博士学位[12]．后又任普林斯顿大学助教，跟拓扑学家莱夫西茨（S. Lefshtz，1884—1972）学习，转向纯拓扑学—代数拓扑的研究，从此奠定了他一生的研究方向．江泽涵1931在北大数学系任教授，1934年出任系主任，在蒋梦麟校长的支持下，他依美国数学教育的模式和自己在美的求学经验，仿照美国数学系办学体系，对选修课进行了重大调整与安排，制定了各项规章制度，加强学生的基础学习，高年级学生就跟老师做研究，尽早让学生进入研究领域，高年级学生就可以超过老师．1934年秋，江泽涵凭借与美国学术界的人脉，聘请了曾任哈佛大学数学系主任的美国著名数学家奥斯古德（W. F. Osgood，1864—1943）为北大数学系教授，来华一年，在系内开设了复变函数、实变函数、力学等课程，影响很大，京、津地区的很多数学教授、学生到北大听他的讲课，北京大学出版了他的实变函数论、复变函数论英文讲义各一册．1936年，《科学》杂志刊登了一篇介绍其学术成就的文章，对他赞誉有加．奥斯古德来华讲学是中美数学交流的一件大事，对提升北大数学系的水平与影响起了很大的作用，先后由许宝騄、孙树本充任其助教，对这几位年青教师的成长获益多多．1935年7月25日，在第一届全国数学会上，北大的数学学术成就与教学受到瞩目，北大数学系的秦汾、王仁辅被选为数学会副董事长，江泽涵任副理事长，任《数学学报》编委．北大数学系已成为当时的数学学术中心之一，在全国处于领先水平，有一些达到了国际先进水平．到1949年，北京大学数学系建立了较为完善的现代大学管理体系，研究成果已达或接近世界一流大学的先进水平，培养出了一批优秀的数学家，有樊畿、王湘浩、王寿仁、张禾瑞等．当时的北大有很好的学术研究制度，北大数学系与美国高校建立了紧密的学术交流制度，教授每服务5

年都可以带薪学术假期一年，可到美国名牌大学研究与学习，也可到国内各地学习考察，学校报销差旅费，青年教师成绩优秀者可资助留学，也可考取官费留学美国．北京大学数学系史上留下名字的十几人中，大都有留学美国和未曾留学美国但又到美国做学术访问的经历．蒋梦麟在他早年的回忆录中就多次提到过，中国近代以来，凡是主要以西方模式为基本运作规律的机构，一般都很有成绩，也就是说基础都打得好，就以北京大学数学系的情况观察，大体也是这样．

我国第二个大学数学系是南开大学数学系，首任系主任姜立夫（1890—1978），浙江平阳（现温州苍南县）人．他 1910 年作为庚子赔款生赴美国入加利福尼亚大学伯克利分校学习数学，1915 年获学士学位，1919 年获美国哈佛大学哲学博士学位，是中国早期获得数学博士学位的两人之一，是将近代数学引入中国的先驱之一．1921 年，姜立夫回国创办南开大学数学系，任教授、系主任．作为留美学者，他对美国的数学和教育十分推崇，热情鼓励学生出国深造．姜立夫说：我鼓励学生出国进修，竭力帮助他们，希望他们帮助我更多地把现代数学搬回来，改进国内大学数学的教学质量．他一人讲授了十几门课程，教学艺术享誉海内外．他的学生刘晋年、江泽涵、申又枨，都留学美国取得博士学位，这些人回国后到北大任教，成了北大的重要力量．他认为国内现代数学教育的发展必须与欧美进行学术交流，他特别重视美欧国际数学期刊的订阅和数学家论文集的收集，南开大学在抗战前完整地藏有世界上最重要的数学期刊和数学家论文集．晚年在中山大学，文革将美国视为中国第一号敌人的那种环境中，他坚持订阅美国数学评论．他说：“停订数学评论就等于砍掉数学系．”[13]美国数学在他心中的地位可见一斑．他培养了刘晋年、江泽涵、申又枨、陈省身、孙本旺、吴大任等一大批名家，在数学上的卓越成就影响遍及世界．当代著名数学家苏步青曾说：“中国数学史不仅要写那些在研究上取得出色成绩的人，更要写为数学事业的发展，兢兢业业、任劳任怨，在教学、组织等基本建设上做出贡献立下汗马功劳的人．姜先生虽然论文写得少一些，但他对中国现代数学事业，功劳至大、影响至深．没有他，中国数学今天的面貌将会是另一个样子．”[14]

清华大学数学系在 1949 年前的中国数学教育中占有重要地位，它的建立和发展与美国有着不解之缘．清华学校最初为清华学堂，是美国部分庚子赔款在北京创办的一所留美预备学校，清华学校有庚子赔款供应经费，受美国大使馆指导，教学计划以美国教学计划为蓝本，教师由美国教员和留美学生担任．仿照美国大学与专门学堂的教学标准，在学制、课程设置、教材教学方法的使用上，都是搬用美国的模式．1914 年著名哲学家罗素参观清华学校后感叹：“清华学校恰像一个由美国移植到中国来了的大学校．”1927 年清华数学系正式成立，第一任数学系主任是美国康乃尔大学攻读数学的毕业生郑之蕃（1887—1963）．1928 年，改建成国立清华大学，清华大学的发展进入了一个新时期．校长由庚款第一期留美学者梅贻琦担任．梅贻琦（1889—1962），天津人，1909 年考取游美学务处选派的首批留学生赴美留学，1914 年毕业于吴士脱理工学院电机系，获工学士学位．他明言：大学，就两个任务，一是研究学术，二是造就人才，要将清华大学办成世界一流大学，师资是关键．高校必须有一大批学问家，所谓大学者，非谓有大楼之谓也，有大师之谓也[15]．1928 年，数学家熊庆来（1893—1969）任清华大学数学系主任，在梅贻琦的支持下，多方面引进人才，打造高水平学术团队．首先，从中国留学生中聘请杰出人才进入清华，杨武之、孙光远、曾远荣均为芝加哥大学数学博士，赵访熊是哈佛大学数学硕士，他们在现代数论、微分几何、泛函分析、应用数学与计算数学领域有突出的成绩，被聘为教授，成为清华数学系的骨干．其次，从毕业生中留下优秀人才充当教师，有胡坤陞、唐培经、周鸿经、段学复、吴新谋、陈鸿远、徐贤修、施祥林等，这批人后来都成为数学各领域的突出专家．第三，不拘一格启用与提拔数学新秀，1930 年，仅有初中学历的华罗庚在《科学》杂志上发表了《苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立之理由》，清华数学系主任熊庆来慧眼识英才，清华校方逐层打破常规，于次年邀请华罗庚到数学系担任图书管理员，尽可能多地为他提供学习和研究的机会，最终将其培养为当代数学大家．第四，加大学术研究力度．1930 年清华数学系设立了理科研究所算学部，从侧重教学转入兼重学术研究，第一个在国内招收数学研究生，由孙光远和杨武之任导师．孙光远（1897—1984）是著名的微分几何专家，南开大学数学系毕业生陈省身（1911—2002）正是冲着孙光远的微分射影的专长报考清华研究生的，成为我国第一个自己培养的硕士研究生，后来成为国际上最著名的几何大师[16]．第五，加强与国际学术界的交流．1935 年 8 月到 1936 年 6 月．美国麻省理工学院数学教授、美国数学会会长、控制论的创始人维纳（N. Wiener, 1894—1964）来清华任客座教授，讲授傅立叶积分、傅立叶级数以及勒贝格积分理论；维纳所讲的都是国际前沿的东西，有的是他正在研究的课题，维纳在清华的一年中，讲座基本每周都有，参加听课的除清华数学系师生之外，还有北京大学、北京师范大学、燕京大学以及部分清华其它学系的师生．他不但传授数学知识，而且注重思想方法的指导，使听众获益多多．在维纳的指导下，华罗庚与徐贤修就他所讲授的课题，完成了《关于傅立叶变换》一文．维纳看后非常欣赏，回国后将其推荐发表于 MIT 的《数学和物理杂志》上．此后维纳一如继往地关心着清华和华罗庚的进步，与清华大学数学系的老师结下了深厚的友谊．正如熊庆来所说：“我少壮学人得其指引遂入于待开发之广阔领域者有之，赖其关系而得在国外研究之捷径者亦有之．”[17]清华大学由于与美国有这特殊的历史渊源，比其它高校与美国学术界保持着更多的交流与合作，极大地提升了教师的研究工作与进

步速度. 清华数学系是1949年之前国内影响最大的数学系，这一时期的毕业生陈省身、许宝騄、柯召、段学复、吴大任、施祥林、庄圻泰等，还有该系的特殊学生华罗庚，后来都成为著名的数学家. 清华数学系受美国学术影响深远，担任清华大学数学系的主任除了熊庆来是法国博士之外，其他前后任系主任的如郑之蕃是美国康乃尔大学学士，杨武之是美国芝加哥大学博士，赵访熊（代理系主任）是哈佛大学硕士，段学复是美国普林斯顿大学博士，华罗庚虽然未在美国上大学，但在美访学工作多年，在普林斯顿大学执教，任普林斯顿高等研究所的高等研究员、Illinois 大学的终身教授. 1949年以前的清华大学数学系可谓名师荟萃、人才辈出，实行教授治校，学术自由，以学术研究与造就人才作为大学的崇高目标，成为乱世中的数学教育与研究的学术圣地.

3 其它帮助与支持

除了清华、北大、南开数学系外，国内其它高校数学系和著名数学家也得到美国学术界的培养与帮助，著名的有：

胡敦复（1886—1978），美国康乃尔大学数学学士，大同大学校长，中国数学会第一届董事会董事长.

胡明复（1891—1927），哈佛大学数学博士，中国以现代数学研究获博士学位的第一人.

林士谔（1913—1987），麻省理工学院博士，求代数方程数字解的林士谔方法受到重视.

何运煌（1892—1920），1914年入康乃尔大学数学系，1917年考上博士，1920年不幸病故，他是第一个在美国数学杂志上发表研究论文的中国学者.

林家翘（1916—），应用数学家，加州理工学院获航空博士学位，发展了微分方程渐近理论.

周炜良（1911—1995），在美国芝加哥大学毕业，一系列以他名字命名的“周坐标”“周形式”“周定理”“周引理”，使他享有盛誉. 抗日战争胜利后去美国约翰·霍普金斯大学任教，直至退休.

此外，中华基金会除了对北大的支持外，又分散而又有重点地支持了一批单位，使一批原来有研究力量又较有工作基础的国立或私立大学和研究机构能较顺利地开展工作. 我们从张奠宙教授搜集的史料看到，中华教育文化基金董事会在1928~1945年间资助数学留学人员的课题研究有32人次. 其中有江泽涵、李达、陈传璋、曾炯、华罗庚、许宝騄等. 中华教育文化基金董事会下的科学教育委员会资助编译了12种数学书籍，1936年夏华罗庚获得中华教育文化基金会的资助，赴剑桥大学访问[18].

4 主要成绩与启示

现代数学教育不是中国人的首创，主要是向西方学习的. 而美国对中国数学教育的介入与帮助尤为突出，在数学教育与研究的各个层面都能看到美国的影响与帮助，20世纪中叶现代数学在中国已生根、开花、结果，使中国重新登上世界数学舞台. 回顾美国对中国的数学教育的主要介入与帮助和影响有：

（1）1902年和1903年，清政府公布了《钦定学堂章程》、《奏定学堂章程》，数学作为一门必修课列入其中，这是中国近代教育史上第一个以政府法令形式公布实施的现代数学教育.“五四”运动以后，改革学制的呼声日益高涨. 此时正值美国教育家孟禄来华之际，他对此尤为关注，并直接参与学制改革. 孟禄认为：数学与本国语文及地理、历史等科，是无论将来从事何种职业的学生都必须学习和掌握的基本知识，数学是成为社会优秀人才的基础[19]. 他关于改革学制的意见和主张得到了与会代表的广泛认可. 1922年（农历壬戌年），新的学制由北洋政府以大总统的名义公布，在全国施行. 壬戌学制对数学课程比过去还有所加强，从此数学作为我国国民教育地位得到确立，自颁行以来，数学课程的具体内容虽屡有变更，但主体框架却一直沿用，数学构成国民教育稳定的知识体系.

（2）1935年，在胡敦复、熊庆来、朱公谨、顾澄等数学家的倡议下，在上海交通大学图书馆举行了中国数学会成立大会. 数学会的诞生，显示了国内数学研究方面已经积聚了相当的力量，标志着我国数学发展进入了现代科学的领域. 它将中国数学界有机地联系为一个整体，有力地推动了中国数学的发展，在国内外的影响深远. 留美的学者群体在数学会中起了核心作用. 董事长胡敦复为我国最早的留美学者之一，数学会的董事会、理事会、评议会到刊物的编辑都有留美学者担任重要职务.

（3）数学的教育体系得以确立，培养的人才的学术水平已接近世界前沿. 创立教育体制是我国当时教育界面临的课题. 美国完备的教育体系，为我国培养数学人才树立了样本，提供了成功经验. 到20世纪30年代，数学界初步探索出了中国现代数学教育之路，已形成较为完备的数学系. 1932年全国共有国立大学15所，省立大学19所，私立大学36所，其中有数学系或数理系的32所，专职教师150人[20]，很多大学都设立了数学系，开设了数学专业，课程的设置主要效仿美国大学. 在20世纪30年代的北大、清华、浙大等名校，已能培养自己的数学硕士，而到抗日战争时期的40年代，从教员的学术水准，开设的课程以及学生的成绩来看，应该说完全能培养自己的数学博士了. 从1917年中国人第一次获得数学博士，到实际上具备培养自己的数学博士的水平，前后不过二十余年的时间，可谓发展迅速.

（4）美国是20世纪的数学中心，有大批造诣深厚、声名卓著的数学家，有一套完善的行之有效的研究教育体系，在数学的许多领域走在其它国家前面. 正是在这里，许多留美学生受到严格的科学训练，培养了求真求实的科学态度，同时也掌握了数学前沿的科学知识和成果，成长为著名的数学家，又成为近代中国数学科学的开拓者和奠基人. 在清华、

北大、南开组建的在近代史上成就卓越的西南联大的 14 位数学教授来看，12 人有在美国学习和在美国工作的经历. 如江泽涵（哈佛大学博士学位)、申文枨（哈佛大学博士学位)、杨武之（芝加哥大学数学博士）、郑之蕃（康乃尔大学数学学士学位)、赵访熊（哈佛大学硕士)、曾远荣（芝加哥大学数学博士）、陈省身（德国汉堡大学博士学位，普林斯顿高等研究所研究员）、华罗庚（美国普林斯顿高等研究院研究员，普林斯顿大学、Illinois 大学的终身教授）、姜立夫（哈佛大学哲学博士学位）、刘晋年（美国哈佛大学哲学博士学位)、张希陆（哈佛大学哲学博士学位），在第一届中央研究院 5 位数学院士中，在美留学的占 60%，留美学生成为数学界的主导和中坚力量.

（5）中国数学与西方数学的逐渐拉大差距的趋势被逆转，中国数学与西方数学的差距正在缩小. 随着中国数学教育与美国数学教育的对接，现代数学课程在中国学校的开设，美国教材的直接使用，中国学者的现代数学水平接近或达到世界先进水平，如华罗庚解析术论、联系群论，陈省身的网络几何、黎曼几何，江泽涵的拓扑学在国外也是全新的领域，胡明复的一级线性微分方程组的研究，江泽涵在代数拓扑方面的研究，1943 年，中国的林士谔提出求代数方程数字解的林士谔方法，杨武之在数论方面的研究，1945 年陈省身建立代数拓扑和微分几何的联系，推进了整体几何学的发展，华罗庚发展了三角和法研究解析数论，都取得了重要的突破. 一大批在美留学、访学的学者的研究成果，引起世界注目. 据统计，到 1949 年，中国数学界的创造性论文，由中国数学会学报刊载的 34 篇，其余多数发表在外国杂志上和《科学》及各大学学报上，总共有 74 位数学家发表了 342 篇论文[21].

（6）在输入数学各科基本知识的同时，数学研究中的逻辑推理这一严密的思维方法和治学门径也随之引入，被留美学生广泛用来进行研究与创造. 中国传统的数学思想，学术理念与数学文化发生了质的变化，现代研究范式被中国数学界接受，传统的数学文化基本完成了向现代化的转换，数学家们研究与思考的问题与数学思维方法与世界先进国家一致，中国的数学教育融入了现代数学教育的潮流，中国的传统数学基本上淡出教育中. 如 1936 年 8 月 19~20 日，在北京举行数学会第二次年会，会上宣读了 14 篇论文，其中论文题目是：江泽涵（北京大学）——二度标准普遍盖族之对称线，申又枨（北京大学）——用有理函数逼近解析函数之问题，程毓淮（北京大学）——关于卵形面上测量分布的两条意见，赵淞（北京大学）——周易群，傅种孙（北平师范大学）——马尔花迪氏问题之 104 解，徐贤修（清华大学）——关于隐函数之可微分性与绝对连续性，庄圻泰（清华大学）——无穷级的逊纯函数之值之分布，许宝騄（中华文化教育基金会研究员）——关于 N 元重极限之研究，陈鸿远（清华大学）——洛勒氏函数之 N 级数之存在讨论，华罗庚（清华大学）——关于瓦林康克二氏广义问题之研究，庄圻泰（清华大学）——调和函数族之逾格惯列，汤璪真（武汉大学）——定理“P〈$P \cdot \equiv \cdot PQ=P$”与汉庭通氏所得路易严切包含式坡尔代数之关系，汤璪真（武汉大学）——路易严切包含式中一似是而非之问题等，陈鸿远（清华大学）——洛勒氏（Roll）函数之 n 级之存在讨论[11]. 由此可见，中国数学已发生根本变化，从传统走向现代，与世界数学融为一体.

百年中国，中西方数学知识差距逐步扩大的趋势被逆转，现代数学在中国已生根、开花、结果，这是中国人民在内外忧患中不甘落后艰苦创业追求国家现代化的一个缩影. 在此过程中，美国的数学教育界给中国数学界提供了巨大的支持与帮助，中美数学家们建立了深厚的友谊，我们现在读他们之间往来的信件还能感到那种关爱和温暖，中国数学界是不应忘记的. 分析这一历史，我们可以看到，现代数学在中国取得巨大进步，这得益于特殊的机缘，使中国的大学形成了一批大教育家、大学问家当校长的局面，这批大学校长都有留学西方大学的经历，他们熟悉中西文化，敏感地把握住世界的潮流，深知我们与西方学术的差距，有比较开阔的胸怀与眼光，真诚地向西方学习，在他们执掌的大学中维护学术尊严，实行研究自由、学术自由、出版自由、讨论自由的原则，教授治校、民主治校，多方面为教授专心学术创造条件，这为我国近代追赶西方数学创造了条件. 而不是像 1949 年以后的一些时间内，“政治家”办大学，阶级斗争专家办大学，关系学专家办大学，工农兵上讲台，外行领导内行，教授尊严扫地，大学变成政治斗争的场所，等级制与长官意志横行，学术自由无从谈起，民主之风消亡殆尽，教授战战兢兢，大学行政化官僚化，官员队伍膨胀，校长、书记一大排，主任、处长一礼堂，科长放下一操场，数学教育的“生态环境”趋于退化. 其次就是在事业初期的制度设计方面，比较有胸怀，知道什么好就学什么，他们不是找借口，以自己国家的特殊国情而自外于世界文明的现有成果，相信西方人，相信西方制度的成熟性和合理性，结合中国实际，独立自由发展，最后取得成果，这是现代数学替代中国传统数学较少障碍而转型的一个前提. 最后我们看到，数学教育与外部保持交流何等重要，与最先进的国家学术保持交流，建立良好的关系是后进国家数学教育发展的必要条件，向美国学习现代数学教育事实上是一条建立中国自己的数学教育的捷径，是中美人民的文化交流与友谊的典型范例. 没有这一条件，现代数学在中国的生根、开花、结果是难以想象的，也不可能有今天这样的成就.

[参 考 文 献]

[1] 筹办夷务始末[Z]. 同治朝四十六，故宫博物院影印本，1930.
[2] 舒新城. 中国近代教育史料（下册）[M]. 北京：人民教育出版社，1961.
[3] 北洋大学——天津大学校史编辑室. 北洋大学——天津大学校史[M]. 天津：天津大学出版社，1990.
[4] 顾长声. 传教士与近代中国[M]. 上海：上海人民出版社，1982.
[5] 田正平. 中外教育交流史[M]. 广州：广东教育出版社，2004.
[6] 罗惇曧. 京师大学堂成立记[J]. 庸言，1912，7（13）：2.
[7] 同文馆题名录[Z]. 光绪五年刊，19–22.
[8] 丁韪良. 格物测算[M]. 同文馆印书局，1868.
[9] 李佩珊. 20世纪前半叶科学技术从美国向中国的传入与影响[J]. 美国研究，1991，（4）：98.
[10] 容闳. 西学东渐记[M]. 长沙：岳麓书社，1985.
[11] 任南衡，张友余. 中国数学会史料[M]. 南京：江苏教育出版社，1995.
[12] 胡炳生. 中国拓扑学的奠基人——江泽涵[J]. 中国科技史料，1995，15（1）：43–49.
[13] 鲁又文，冯淑芬. 近代中国数学教育的一代宗师——姜立夫[J]. 天津师范大学学报，1999，19（3）：64–66.
[14] 陈克艰. 苏步青教授谈中国现代数学[J]. 中国科技史料，1990，11（1）：3–9.
[15] 清华大学校史编写组. 清华大学史稿[M]. 北京：中华书局，1981.
[16] 张洪光. 陈省身数学业绩与数学思想初探[J]. 赣南师范学院学报，1996，（1）：1–6.
[17] 熊庆来. 熊庆来先生在中国科学院数学研究所欢迎会上的讲话[J]. 数学进展，1957，3（1）：676.
[18] 许康，苏衡彦. 关于李达博士生平史料的若干探索与注记[J]. 中国科技史料，2001，22（3）：256–259.
[19] 李桂林. 评新学制草案[M]. 北京：人民教育出版社，1987.
[20] 莫由，许慎. 中国现代数学史话[M]. 南宁：广西教育出版社，1987.
[21] 中国数学简史编写组. 中国数学简史[M]. 济南：山东教育出版社，1985.

Help and Interference of America in Modern China Mathematics Education

LI Wei-jun
(College of Mathematics and Science, Neimenggu Normal University, Neimenggu Huhehaote 010022, China)

Abstract: One and half century ago, China started a movement of modernizing school education by abolishing old examination system and learning from western countries. The modernization of mathematics of education was also started from that time. as American mathematics education was outstanding, china follows its example. mathematics curriculum and mathematics education model of American school was copied by china early missionary school and missionary college, and it was a very important foundation of the china mathematics education. The students trained in America returned and made great contribution to Chinese education. The department of mathematics of Peking University, Tsinghua University and Nankai were the proof of their contribution. America academic circles and educational circles gave Chinese mathematics circles much help and support in many ways, because of it, China mathematics education rapidly to turn direction and accomplish the incipient modernization of mathematics education. It was an essential condition for the development of mathematics education to keep the communication with advanced countries.
Key words: America; mathematics education; missionary; the Boxer Indemnity

[责任编校：陈汉君]

第 17 卷第 2 期 数学教育学报 Vol.17, No.2
2008 年 4 月 JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION Apr., 2008

从“为教学设计学习”到“为学习设计教学”

——对“函数的单调性”教学设计的改进和反思

罗 强

（苏州市第五中学，江苏 苏州 215008）

摘要：“函数的单调性”的第一课时聚集了数学教学的诸多矛盾，它的教学设计和教学过程对每个数学教师都是一个挑战. 基于“为教学设计学习”理念的教学设计注重教师的教而忽视学生的学，注重知识的传递过程和学生对教师权威的服从，而忽视学生的独立思考和意义建构. 基于“为学习设计教学”理念的教学设计则着眼于学生的学，注重让学生经历函数单调性概念由图象直观特征到自然语言描述再到数学符号描述的进化过程，注重让学生体验数学知识的发生发展过程，并在体验函数单调性概念符号化的建构过程中掌握数学的认知策略.

关键词：函数的单调性；为教学设计学习；为学习设计教学

中图分类号：G632.4 文献标识码：A 文章编号：1004-9894（2008）02-0085-05

高中数学新课程中，函数单调性的起始教学被安排在“第二章——函数概念和基本初等函数Ⅰ、§2.1.3 函数简单性质”中. “函数的单调性”的第一课时聚集了数学教学的诸多矛盾，它的教学设计和教学过程对每个数学教师都是一个挑战. 教师在教学中设定怎样的教学目标，选择怎样的教学策略，设计怎样的问题情境和问题链，既可以充分反映教师在数学教学上的关注点，也可以充分体现教师的教学能力和教学智慧. 因此，这个课题是各级各类教研活动的公开课、评优课的经典课题.

本文拟通过“函数的单调性”第一课时的两个不同教学设计的对比，对如何基于“为学习设计教学”理念进行教学设计，提出自己的一些做法和体会.

1 基于“为教学设计学习”理念的教学设计

先给出一位职初教师的教学设计. 这位青年教师已掌握教学设计的基本要求，按照这样的教学设计实施教学，基本上可以比较顺利地完成教学任务. 但是，细细剖析这份教学设计，可以发现整个教学设计基于的是“为教学设计学习”的理念.

【教学目标】

（1）知识与技能：理解单调函数、单调区间的概念，并能根据函数的图像指出单调性、写出单调区间，能运用函数的单调性定义证明简单函数的单调性.

（2）过程与方法：通过本节课的教学，渗透数形结合的数学思想，同时对学生进行辩证唯物主义的教育.

（3）情感、态度与价值观：培养学生分析、综合能力，理性描述生活中的增长、递减现象.

点评：上述教学目标中，知识与技能目标定位比较恰当. 但从后面的教学过程看，教师对一些定位教学目标的关键词，如“理解”、“简单”等并没有很好地理解，也没有很好地贯彻，这样，制定教学目标这个过程实际上成了无用的文字摆设. 此外，“过程与方法”目标，“情感、态度与价值观”目标显得空洞无物，给人以把新课程的 3 维目标当作标签来贴的感觉.

【重点难点】

（1）教学重点：掌握函数单调性的概念.

（2）教学难点：利用函数单调的定义证明具体函数的单调性.

点评：函数单调性的定义是一个符号化特征很强的数学概念. 这样的概念高一学生是第一次接触，如何让学生理解这种符号化的、抽象的数学语言，参与函数单调性概念的符号化过程是本节课的第一个难点. 同时，由于学生第一次接触到代数证明，如何运用函数单调性的定义严格证明函数的单调性并完成规范的书面表达则是本节课的另一难点. 在本教学设计中，教学重点、难点的设定不够准确.

【教学过程】

（1）情境引入.

引例 1 给出春兰股份某日股价的走势图，观察股价的增减变化.（图略）

引例 2 图 1 是某市一天 24 小时内的气温变化图. 气温 θ 是关于时间 t 的函数，记为 $\theta=f(t)$，观察这个气温变化图，说明气温在哪些时间段内是逐渐升高的或下降的？让学生回答气温的变化情况（只要初步描述）.

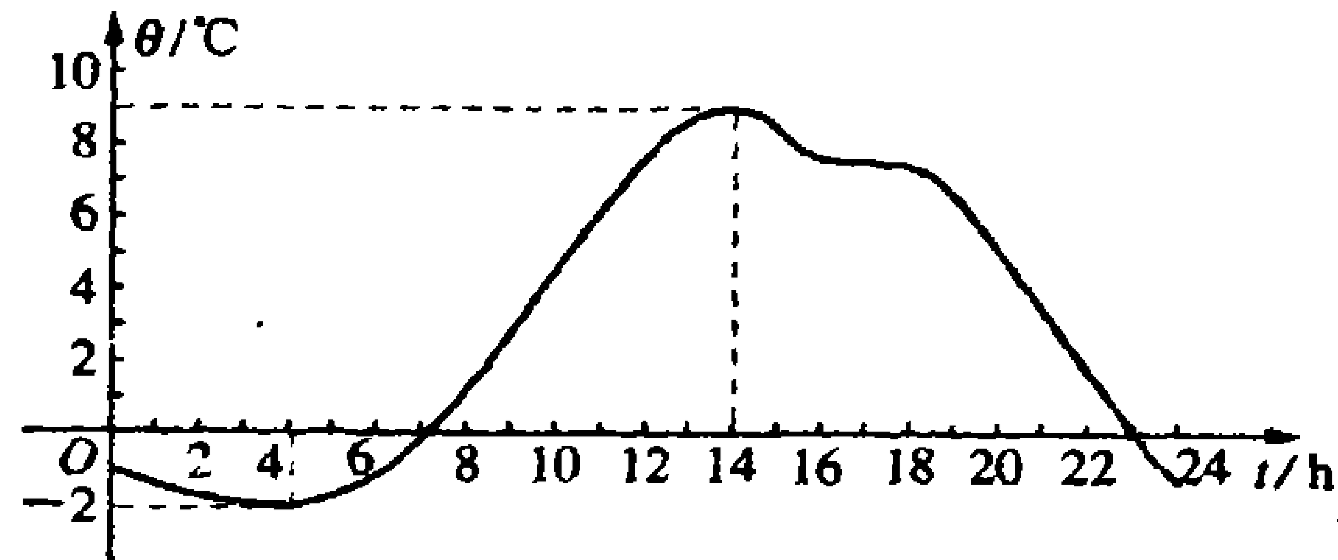


图 1 某市一日气温变化图

进一步引导：我们用怎样的数学语言来刻画上述时间段内“随着时间的推移气温逐渐升高或降低”这一特征呢？

点评：函数单调性是函数性质中的一个重要概念，教师需要创设恰当的情境让学生体会函数单调性概念产生的必

收稿日期：2008-01-06

作者简介：罗强（1965—），男，回族，江苏苏州人，高级教师，主要从事中学数学教学研究.

要性和价值，并引领后续的教学．但本教学设计在创设情境时重视了情境的生动性而忽视了情境的数学性，存在为情境而情境的问题．引例1的股价走势图虽然可以反映股价的变化，但与高中数学所研究的函数单调性严格来讲有一定的不同，且股价走势情境包含学生所不具备的一些股市专业知识，作为本节课的教学情境不妥．此外，本节课选用两个情境也显多余．

（2）讲授新知．

出示课题：§2.1.3 函数的简单性质 1.函数的单调性．

上述描述中的在某个区间内 y 随 x 的增大而增大（减小），在数学中我们就称为此函数在这个区间内是增函数（减函数）．

如何用数学语言来描述？

单调增函数和单调减函数的概念：一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，区间 $I\subseteq A$．如果对于区间 I 内的任意两个值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调增函数（Increasing Function），I 称为 $y=f(x)$ 的单调增区间（Increasing Interval）．

如果对于区间 I 内的任意两个值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调减函数（Decreasing Function），I 称为 $y=f(x)$ 的单调减区间（Decreasing Interval）．

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调增函数或单调减函数，那么就说函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上具有单调性．单调增区间和单调减区间统称为单调区间．

说明：强调"任意"、"都有"这些关键词．

点评：本教学设计从问题情境直接进入到教师讲授数学新知，采用了把知识当结果来教的教学方式．这样的教学设计注重了教师的教而忽视学生的学；注重了知识的传递过程和学生对教师权威的服从，而忽视了学生的独立思考和意义建构．其实，从学生学习的角度出发，知识的生成过程比知识本身更重要．

（3）讲解例题．

例1 画出下列函数的图像，并写出单调区间：

（1）$y=-x^2+2$；（2）$y=x$；（3）$y=\frac{1}{x}(x\neq 0)$．

说明：教师提问上述函数在定义域上是单调函数吗？让学生加深对单调函数的印象，说明定义域内的单调性要分情况确定．

例2 求证：函数 $f(x)=-\frac{1}{x}-1$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是单调增函数．

证明略．教师小结定义法证明函数在某区间内单调性的步骤：

（1）任取区间内两个值 x_1, x_2，且 $x_1<x_2$；

（2）判断相应的 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 的大小（作差、变形）；

（3）若 $f(x_1)<f(x_2)$ 则函数为区间内的单调增函数，若 $f(x_1)>f(x_2)$ 则函数为区间内的单调减函数（定号）．

例3 求函数 $y=x+\frac{1}{x}$（$x>0$）的单调性．

说明：利用多媒体辅助教学，先用几何画板进行直观描述，然后用定义法证明．

探索题 探究（1）求函数 $y=x+\frac{2}{x}$ $(x>0)$ 的单调性；（2）求函数 $y=ax+\frac{b}{x}$ $(a>0, b>0)$ 的单调性．

点评：有许多教师认为，数学教学设计就是数学例题和数学练习的设计，本教学设计中，教师在前面省略了函数单调性概念的生成过程，而将主要的教学时间安排在了例题和练习的教学上．这样的教学设计存在重题型展示和解题训练，轻知识生成的问题．例3和探索题追求一步到位，其难度远远超出了教学目标所设定的函数单调性第一课时的教学要求．由于学生刚刚接触一个新的数学概念，尚不具备独立探索和思考的能力，例3和探索题的教学过程势必就会成为教师单向讲授，学生被动接受的局面．

2 基于"为学习设计教学"理念的教学设计

2.1 分析教学任务

教学设计的首要任务就是明确教学目标，实际上教学目标是教学设计的灵魂和统帅，将指引后续教学设计的方向，决定后续教学设计的具体工作．按照"为学习设计教学"的理念，在制定教学目标时，应从以下3个方面对教学任务进行分析：

（1）从数学知识体系的角度分析教学任务．

函数单调性是高中阶段刻画函数"变化"的一个最基本的性质．函数单调性的学习和运用贯穿高中代数课程的始终，在教学中要体现出螺旋上升的特征．高中数学课程中对于函数单调性的研究可以分为两个阶段：第一阶段，用运算的性质研究单调性，知其变化趋势；第二阶段，用导数的性质研究单调性，知其变化快慢．高一对函数单调性的学习处于第一个阶段，需要教师把握好教学要求，稳步推进，不能急于求成，超越阶段．

（2）从学生学习的角度分析教学任务．

函数的单调性是学生学习了函数概念后研究的函数的第一个性质，也是学生进入高中阶段后接触的第一个用数学符号语言刻画的数学概念，它的学习对学生来说具有一定的挑战性．同时，函数单调性的研究过程具有较好的示范性，可以为学生进一步学习函数的其他性质提供方法范例，对学生提升数学认识具有引领作用．因此，在教学设计中，就需要教师在把握学生学情的基础上体现数学本质，有效突破教学难点．

（3）从教师教学的角度分析教学任务．

"函数的单调性"第一课时既是一节较为抽象的数学概念课，也是一节具有奠基意义的数学方法课，同时还包含着数学认知策略的教学．按照"为学习设计教学"的理念，教学的目的在于有效的促进学生的学习，教师要"以学定教"、"因材施教"、"教为不教"，教学设计一方面是通过创设教与学的系统，帮助学生最大限度的获取数学知识，另一方面在于帮助学生学会学习，也即让学生掌握数学的认知策略．因此，教师既需要从数学学科体系的宏观角度进行整体把握，

也要从教材编排的中观角度进行单元设计，还要从教学方法的微观角度做好具体的课堂教学设计．

2.2　确定教学目标

通过前面的任务分析，我觉得在决定本节课的教学目标和教学策略时，要把握以下两点：第一，把握教学要求，不求一步到位；第二，明确知识目标，落实隐性目标．

知识目标往往就是教学的显性目标，确定知识目标的关键在于分清主次轻重，把握好教学要求．根据《课标》的要求，我们把本节课的知识目标定位在以下 3 个方面：一是理解函数单调性的概念，二是掌握判断函数单调性的方法，三是会用定义证明一些简单函数在某个区间上的单调性．

这节课的隐性目标一定要着眼于学生的学，函数单调性的定义是对函数图像特征的一种数学描述，它经历了由图像直观特征到自然语言描述再到数学符号描述的进化过程，反映了数学的理性思维和理性精神，它的教学对高一学生来讲是一个很有价值的数学教育载体和契机．因此，这节课的隐性目标应该包括让学生体验数学知识的发生发展过程，在体验函数单调性概念符号化的建构过程中掌握数学的认知策略．

2.3　设计教学过程

根据前面的分析，我把教学流程分成了 3 个阶段：

第一阶段：函数单调性概念的符号化过程．

（1）学习准备．

教师回顾教材中的本章引言，说明从本节课开始，我们将要从研究如何反映客观事物的变化规律，到研究它们是如何变化的，为学生今后一个阶段的学习指引一个大方向．

（2）问题情境．

问题 1：教师和学生一起举出生活中描述上升或下降的变化规律的成语：蒸蒸日上、每况愈下、波澜起伏．

问题 2：请学生根据上述成语分别给出一个函数，并在直角坐标系中绘制相应的函数图像．

设计意图：创设“成语→图像”的问题情境，让学生用朴素的生活语言描述他们对变化规律的理解，并请学生将文字语言转化为图形语言，这样做使教学过程富有情趣，可激发学生的学习热情，在教学起点的设定上也比较恰当．从左向右看函数图像的变化趋势有 3 种情况：① 在整个定义域上呈上升趋势；② 在整个定义域上呈下降趋势；③ 定义域被划分成若干区间，在每个区间的上升（或下降）趋势是确定的，3 个成语恰好对应这 3 种情况．

（3）温故知新．

问题 1：观察学生绘制的函数的图像（如图 2，实际教学中可根据学生回答定），指出图像变化的趋势．

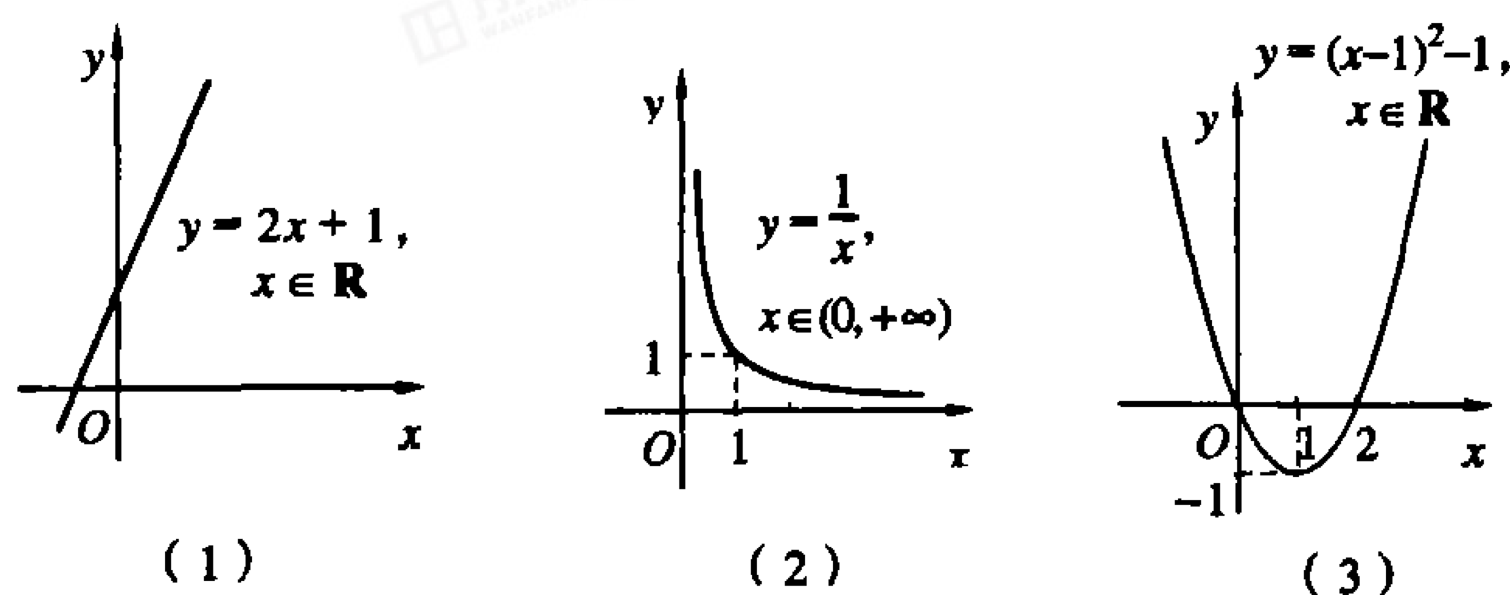


图 2　函数图像（一）

观察得到：随着 x 值的增大，函数的函数图像有的呈逐渐上升的趋势，有的呈逐渐下降的趋势，有的在一个区间内呈上升的趋势，在另一区间内呈逐渐下降的趋势．

问题 2：“图像呈逐渐上升趋势”这句话初中是如何描述的？

例如，初中研究 $y=x^2$ 时，我们知道，当 $x<0$ 时，函数值 y 随 x 的增大而减小，当 $x>0$ 时，函数值 y 随 x 的增大而增大．

回忆初中对函数单调性的描述性定义：

图像呈逐渐上升趋势 ⇔ 函数值 y 随 x 的增大而增大

图像呈逐渐下降趋势 ⇔ 函数值 y 随 x 的增大而减小

函数的这种性质称为函数的单调性．

设计意图：学生在函数单调性这一概念的学习上有三个认知基础：一是生活体验，二是函数图像，三是初中对函数单调性的学习．对照绘制的函数图像，让学生回忆初中对函数单调性的描述性定义，并在此基础上进行概念的符合化建构，与学生的认知起点衔接紧密，符合学生的认知规律．

（4）建构概念．

问题 3：如何用符号化的数学语言来准确地表述函数的单调性呢？

第 1 步：将两个“增大”符号化．

当 $x_1<x_2$ 时，$y_1<y_2$

第 2 步：再将“随”符号化．

当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$

第 3 步：再将隐含语言“任意”符号化．

能否通过个别数值来说明单调性？例如，函数 $y=x^2$（$x\in\mathbf{R}$），取 $x=-1$，2，3，4，…，相应地 $y=1$，4，9，16，…，能不能说函数值 y 随 x 的增大而增大？

对区间 I 上有限个或无限个自变量满足 $x_1<x_2$，且 $f(x_1)<f(x_2)$，都不能反映“函数值 y 随 x 的增大而增大”的本质．必须强调 x_1，x_2 的任意性，才能准确表述单调递增的特征．

对任意 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$

第 4 步：再将隐含语言“区间”符号化．

x_1，x_2 在“任意”的同时，还有“不任意”，因为单调性描绘的是函数的局部性质，它与区间密不可分，强调定义中 x_1，$x_2\in I$．

对于区间 I 内的任意两个值 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$

定义：一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，区间 $I\in A$．如果对于区间 I 内的任意两个值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调增函数，I 称为 $y=f(x)$ 的单调增区间．

问题 4：如何定义单调减函数呢？

定义：一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，区间 $I\in A$．如果对于区间 I 内的任意两个值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调减函数，I 称为 $y=f(x)$ 的单调减区间．

如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数或减函数，那么就说函数 $y=f(x)$ 在这个区间上具有单调性，这个区间就叫做函数 $y=f(x)$ 的单调区间．

设计意图：问题3的解决被设计成逐层递进的4步，这样可以让学生充分参与用严格的数学符号语言定义函数单调性的全过程，让他们亲身体验数学概念如何从直观到抽象，从文字到符号，从粗疏到严密的，让他们充分感悟数学概念符号化的建构原则．对于学生错误的回答，教师可引导学生分别用图形语言和文字语言进行辨析，特别是要使学生认识到函数单调性概念的本质在于自变量不可能被穷尽，从而引导学生在给定的区间内任意取两个自变量 x_1, x_2．

问题4则要求学生结合图像和单调增函数的定义，通过类比的方法，由学生自己得到单调减函数的概念，在这个过程中，学生可以体会数学概念是如何扩充完善的．

第二阶段：从不同角度深入理解函数单调性的概念．

（1）顾名思义，对“单调”两字加深理解．

汉语大词典对“单调”的解释是：简单、重复而没有变化．

我哼出一段音乐调子：$\dot{1}$，7，6，5，4，3，2，1，再换成1，5，3，5，1，5，3，5，前者给我们单调递减的感觉，后者则是在变化的．

（2）呼应引入，解决问题情境中的问题．

函数 $y=2x+1$ 的单调增区间是 $(-\infty, +\infty)$；

函数 $y=\frac{1}{x}$ （$x\in(0, +\infty)$）的单调增区间；

函数 $y=(x-1)^2-1$ 的单调增区间是 $[1, +\infty)$，单调减区间是 $(-\infty, 1]$．

（3）构造反例，加深对概念的理解．

如何说明一个函数不具有单调性？实际上只要否定“任意”即可．要说明 $y=f(x)$ 在区间 I 上不是单调增函数，只要在区间 I 内找到两个值 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 即可．

一个函数在定义域的若干个区间上具有相同的单调性，能否说在定义域上具有相同的单调性？（见例1）

例1　作函数 $y=\frac{1}{x}(x\neq0)$ 的图像，并写出它的单调区间．

解：函数 $y=\frac{1}{x}$ $(x\neq0)$ 的图像如图3所示，$(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 是两个单调减区间．

提问：能不能说，函数 $y=\frac{1}{x}$ $(x\neq0)$ 在定义域 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ 上是单调减函数？

引导讨论，从图像上观察或取特殊值代入验证否定结论．（如取 $x_1=-1$，$x_2=\frac{1}{2}$）

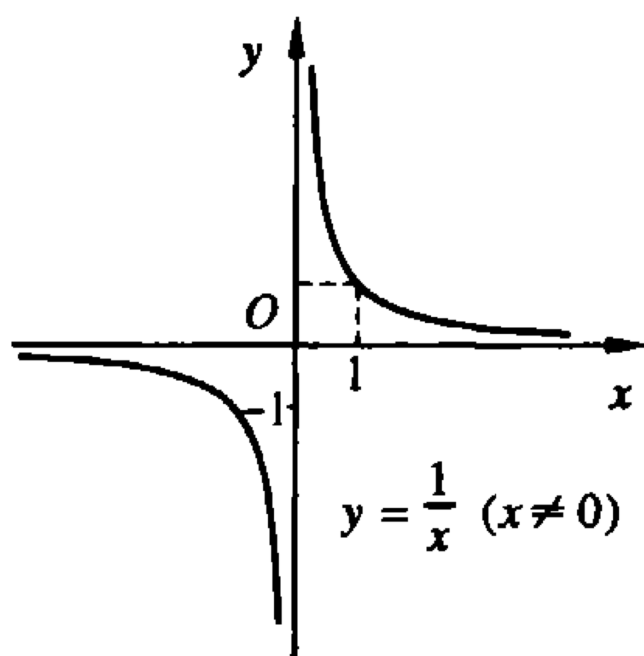


图3　函数图像（二）

设计意图：学生对一个概念的认识不可能一次完成，教师要善于从多个角度，通过概念变式教学和构造反例帮助学生理解概念的内涵与外延．在学习如何证明一个函数的单调性之前，先与学生一起探讨怎样才能否定一个函数的单调性对帮助学生理解函数单调性的概念尤为重要，可以加深学生对“任意”两字的理解．

第三阶段：学会用函数单调性的定义判断并证明函数的单调性．

例2　判断函数 $f(x)=-\frac{1}{x}-1$ 的单调性，并证明．

通过本例，教师要向学生说明：

（1）判断函数单调性的主要方法：观察法：画出函数图像来观察；定义法：严格按照定义进行验证；分解法：对函数进行恰当的变形，使之变成我们所熟悉的且已知其单调性的较简单函数的组合．

（2）概括出定义证明函数单调性的一般步骤：取值→作差→变形→定号．

练习：作函数 $y=(x-1)^2-1$、$y=|x-1|-1$ 的图像，写出单调区间．

设计意图：单调性的证明是学生在函数内容中首次接触到的代数论证内容，通过本例，要让学生理解判断函数单调性与证明函数单调性的差别，掌握证明函数单调性的程序，并深入理解什么是代数证明，代数证明要做什么事．

3　几点教学反思

通过对“函数单调性”教学设计的改进、实践和反思，我对教学设计有了更深的认识，教学设计最根本的理念是“为学习设计教学”，而不是“为教学设计学习”．

（1）教学设计的要素是——学情分析、目标导向、知识定位与问题设计．如果把教学看作是教师带领学生一起去远足，那么学情分析的目的是要分析学生的认知基础，确定一个合情合理的教学起点；目标导向则是要教师分析预期达到的教学效果，即远足所期望到达的目的地，这是教学的根本指向和核心任务，是教学设计的关键；知识定位则好比是教师要预先分析通往目的地的道路状况，从而决定前进的方法和策略；问题设计则好比是设计行程，设定远足过程中的途经点，恰当的行程安排可以指引师生高效地向着目的地前行．

（2）教学设计中的知识定位就是要确定这节课所要教学的知识的类型，并根据知识类型确定相应的教学方法和教学策略．根据现代认知心理学关于广义知识分类的研究，知识可以分为3类：陈述性知识、程序性知识和策略性知识[1]．在本节课中，“什么叫函数的单调性”是陈述性知识，“如何判断函数的单调性”、“如何证明函数的单调性”就需要程序性知识．隐含在函数单调性有关概念和原理学习过程中的认知策略和对思维过程的自我反思就是策略性知识．

本节课的教学难点之一是如何运用函数单调性的定义严格证明函数的单调性，这实际上是程序性知识的教学．程序性知识学习的第一阶段是陈述性的，第二阶段是通过应用这一规则的变式练习，使规则由陈述性形式向程序性形式转化．就“如何证明函数的单调性”来说，学生通过教师讲解和意义建构，知道了证明函数的单调性的规则，并能陈述这些规则（陈述性知识），再通过一定的变式练习，才能根据规则对函数的单调性进行严格的证明．

数学的策略性知识包括解决问题的策略、数学推理的策略以及对自己或他人数学思维过程的反思，策略性知识往往是不能言传的默会知识，笛卡儿曾说过：“最有用的知识是关于方法的知识．”但我们在教学中常常会不自觉地“只见树木，不见森林”，只重视陈述性知识、程序性知识的教学，

而忽视策略性知识的教学．函数单调性的定义经历了由图像直观感知到自然语言描述，再到数学符号语言描述的进化过程，在本节课的学习中，学生最重要的收获也许就是体验和感悟蕴含在函数单调性概念的符号化建构过程中的策略性知识．

（3）张奠宙教授提出："教师的责任在于把写在教科书上的冰冷的学术形态，恢复为学生易于接受的火热思考的教育形态．"[2]波利亚则说："在教一个科学的分支（或一个理论、一个概念）时，我们应该让孩子重蹈人类思想发展中的那种最关键的步子，当然我们不应该让他们重蹈过去的无数个错误，而仅仅是重蹈关键性步子．"这两句话揭示出数学有三种形态：学术形态、教育形态、自然形态．教学设计就是要在数学的自然形态和数学的学术形态两极的中间构建起既反映数学本质又适宜学生学习的数学的教育形态．

［参 考 文 献］

[1] 张春莉，王小明．数学学习与教学设计[M]．上海：上海教育出版社，2004．

[2] 张奠宙，王振辉．关于数学的学术形态和教育形态——谈"火热的思考"与"冰冷的美丽"[J]．数学教育学报，2002，11（2）：1-3．

From "Learning by the Design of Teaching" to "Teaching by the Design of Learning"——a Review and Improvement of Teaching Design and Planning for "Monotonicity of Function"

LUO Qiang

(No.5 Middle School, Jiangsu Suzhou 215008, China)

Abstract: A good many contradictions of math education assembles at the first lesson of "monotonicity of function", which constitutes challenged to the teaching design and planning and teaching process for every math teacher. Teaching design and planning based on the concept of "learning by the design of teaching" paid more attentions to the teaching of teachers than to learning of learners, emphasize on the transferring process of knowledge and the student's obedience to the power of teachers, thus neglect the independent reflection and purport conformation. However, teaching design and planning based on the concept of "teaching by the design of learning", with an attentive view to the learning process of students, emphasized on the evolution process of "monotonicity of function" from intuitive graphic character to natural language description and then to math denotation depiction, and also emphasized on the genetic evolution process of math knowledge, help to master the cognitive strategy by experiencing the symbolic construction of "monotonicity of function".

Key words: monotonicity of function; learning by the design of teaching; teaching by the design of learning

[责任编校：陈汉君]

（上接第30页）

Tryout Study on the Development of Pre-service Primary Mathematics Teachers Based on the Mathematical Reform by an Example of the Implementation of Problem Posing in the Course of Instructional Skills on Primary Mathematics

CHEN Li-min[1,2], CHEN Qi[3], LI Lin-bo[1], Verschaffel Lieven[2], YANG Bao-zhong[1]

(1. Elementary Education College, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China;

2. Center for Instructional Psychology and Technology, University of Leuven, Belgium;

3. School of Psychology, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: The object of curriculum reform is teachers can penetrate new ideas in their teaching successfully. It is also the object to training of pre-service teachers. The teaching on primary mathematics should be presented the theory involved. The study mode of group cooperation and multi-evaluated mode should be penetrated into the teaching on primary mathematics.

Key words: mathematics teacher education, problem posing, primary mathematics teaching

[责任编校：陈隽]

第17卷第2期 数学教育学报 Vol.17, No.2
2008年4月 JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION Apr., 2008

科学发展观与数学教育

——GH数学教育方式的基本精神和特征

洪双义[1]，杨 之[2]

（1．天津市河西区教育中心，天津 300200；2．天津宝坻区教研室，天津 301800）

摘要：“科学发展观”是引领我国经济社会发展全局的重大战略思想．如何在数学教育中贯彻科学发展观，是数学教育界广泛关注的热点问题．设计“高效和谐的数学教育方式”（GH）的初衷，就是在数学教育中，落实科学发展观．“GH数学教育方式”是在“MM教育方式”实验研究的基础上设计的，是它的一个新发展．

关键词：科学发展观；发展；全面协调可持续；MM教育方式；GH数学教育方式

中图分类号：G421 **文献标识码**：A **文章编号**：1004-9894（2008）02-0090-03

科学发展观既是世界观、方法论，一种科学理论，是对自然和社会历来发展理论的精辟的哲学概括，又是指导方针、统领全局的纲领和重大战略思想．特别地，它还继承和发扬了中国优秀传统文化的核心：和合（和平、合作、和谐、和衷共济）思想，讲究和而不同，相辅相成，协调发展．

要充分发挥科学发展观作为观念（即世界观、方法论）的功能：能帮助和促进人们转变旧（不适应、不符合科学发展观的）观念，树立新观念，从而指导他们行动的自觉性和坚定性，进而解决问题，吸引全社会的积极性，从而达到把科学发展观落实到经济社会发展的各个方面的目的．这正是它既为世界观、方法论，又是方针和战略思想双重身份的优势所在．

1 树立合理的数学观和教育观

数学的历史和实践都证明：“数学观对数学及其教育的影响是客观存在的．”[1]为了在数学教育中贯彻落实科学发展观，就要用科学发展观回顾数学发展史和数学的特征，分析数学教育的现状，从而确立正确的数学观和教育观．

1.1 数学发展史一瞥

（1）数学发展史是一部和谐发展的历史．在数学发展的初期，积累了大量数学概念、方法、事实，显得杂乱无章．后来，在中国，以“问题”为准把它们分为9类，成为《九章算术》；在希腊，则用逻辑方法，编著成《原本》，知识方法各入其位．后来发展出许多的分支，数学提出“公理化”方法，分别去统领它们，而对公理系统的要求是具备“三性”：独立性、完备性和无矛盾性．无矛盾性就是和谐性．如果说独立性和完备性要求有时还可以放松的话，那么“无矛盾性”的要求是必须严格坚持的，因为一个不和谐的理论系统是无用的、有害的．

（2）通过不断克服不和谐而达到和谐．从主流看，数学确是一个和谐的整体，但它也不是铁板一块，在发展的过程中，也在不断地出现大大小小不和谐的现象，如著名的“三次数学危机”．第一次由$\sqrt{2}$引发，作为单位正方形对角线长，它应当是数，按毕达哥拉斯“整数之比才是数”的观念，它不是数，事实与观念的冲突酿成危机，以转变观念达到和谐而告终．第二次是微积分方法的迅猛发展和广泛应用同薄弱的理论基础形成的危机，以柯西等人加固基础，达到“相称”而告终．第三次是在公认的数学各分支共同的基础——集合论中出现悖论引发危机，以公理集合论的问世而得以平息，但由此引发的“数学基础”问题却影响深远，以致后来出现了逻辑主义、直觉主义和形式主义3大学派，依不同的数学观提出不同的解决方案．除此之外，数学中诸如无限性的争论，关于“第五公设”的争论，关于“虚数”的争论等，总是一波未平，一波又起．数学总是在这种论争中消解不和谐而达到和谐，从而得以快速、持续地发展．

（3）资源节约型和环境友好型的数学．在数学中，也存在资源节约问题，尽管它的资源无穷无尽，没有资源枯竭的问题．比如，三角形全等的判定，有SSS、SAS、ASA，那么，SSA（两边一对角对应相等）呢？“不能判定”，一般教科书或宣布“不能判定”，或只字不提而弃为“垃圾”，污染数学理论的环境，造成“负迁移”源，可能被学生误用而犯错．在数学家傅种孙笔下的《高中平面几何》中，却补充了5个条件，宣称“再符合5个条件之一者，即可判定”，从而化“废”为宝．另外，数学历来的“习惯”是把无解的、被反面解决的问题充分利用，变成宝贵资源，如罗氏非欧几何就是在汲纳第五公设反面解决的资源的基础上建立起来的．

（4）处心积虑，为数学的可持续发展谋．数学的分支纷繁、方法各异，统一的数学，会不会不复存在？希尔伯特对

收稿日期：2008-03-04

作者简介：洪双义（1959—），男，回族，山东临青人，特级教师，主要从事数学教育研究．

此做了坚定的回答[2]："数学的有机的统一，是这门科学的固有的特点……" 另外，像数学文献"爆炸"问题，数学发展的动力问题，也都是关乎数学生死存亡的大事. 对前者，知名数学家徐利治以建立《数学文献学》、《数学评估学》[3]的策略应对之；对于后者，杨世明和袁桂珍提出了"多元动力"的主张[4].

1.2 对数学教育状况的反思

（1）可以说，自从有了数学教育的那一天起，就有了数学教育的改革，尤其是近现代，教学内容的改革，教学方式方法的改革，教育思想的探索，大大小小，此起彼伏，雷声大，雨点也大，改革的成果，也十分可观. 然而谈到效果，则总不尽如人意，于是再修改、再实验，有的销声匿迹了，可过若干时间，再度沉渣泛起，形成反复进行的怪圈. 为什么会这样呢？

数学教育家徐利治教授深刻地指出："数学哲学研究的各个方面，都与数学教育有密切联系，都对学生思维能力的培养有重要影响，然而……以往的数学哲学研究很少考虑到数学教育的需要，而数学教育工作者对数学哲学研究的成果也知之甚少，有些人把数学教育的思想基础仅仅归结为数学教育心理学，而没有意识到数学哲学是数学教育更深刻的思想基础，因而很多问题就无法上升到数学哲学高度加以认识." [3]（着重号为引者所加）

另外，托姆（Thom）和赫什（Hersh）也分别指出："事实上，无论人们的意愿如何，一切数学教学法根本上都出于某一数学哲学，即便是很不规范的教学法也是如此." "因此，问题并不在于教学的最好方式是什么，而在于数学到底是什么……如果不正视数学的本质问题，便解决不了关于教学上的争议." [5]不正视数学的本质问题，抓不住数学教学真正的或更深刻的思想基础，因此就无法解决数学教育教学中的根本问题，这就使众多的数学教学的方式方法命途多舛. 而目前，国内对数学教育，有弱化数学的倾向，甚至个别地区数学教育有被课程与教学论专业边缘化的危险[6].

（2）1989 年，在我国数学方法论和数学教育研究成果的基础上，汲取波利亚和傅种孙先期将数学哲学、数学方法论用于培训教师的经验，无锡教研中心的徐沥泉老师设计并开始实施"贯彻数学方法论的教育方式，全面提高学生素质数学教育实验"（即 MM 实验），通过五年三轮实验，取得包括学生成绩大幅度提高和一批高水平的（既能教学又能搞科研的）数学教师成长成熟在内的丰硕成果. 1995 年通过严格鉴定，从此"数学方法论的教育方式"（MM 教育方式）宣告诞生[7]，并开始了它边推广、边实验的漫漫历程，也开了将数学哲学、数学方法论系统地应用于数学教育（数学教育与数学哲学联姻）的先河[8]. 正因为如此，在我国数学教育改革"方案"纷呈，经大浪淘沙又纷纷销声匿迹的严峻形势下，"MM 教育方式"是不仅存活，而且还蓬勃发展的数学教育改革方案.

正是在这一时期，国家教委提出了实施"素质教育"的口号，在这一口号下，我国数学教育又进行了包括教育方式方法、大纲（课标）、教材改革在内的一系列改革实验，取得了不少成果，在"科学发展观"的指引下，"GH 数学教育方式"应运而生.

2 GH 数学教育方式及其特征

"GH 数学教育方式"即高效和谐的数学教育方式，取其汉语拼音 GAOXIAO HEXIE 的两个词头作为代号. 表述如下：

> 教师在数学教学的全过程中，要贯彻科学发展观，充分发挥数学的素质教育功能，遵循四项基本原则，瞄准四项具体目标，恰当地操作八个变量，促进学生全面和谐发展.

GH 除了具有"MM 教育方式"的一般特征之外，还具有如下特征：

（1）更凸显中国特色. 它开宗明义，明确提出要贯彻落实科学发展观，包括以人为本、效率意识、全面协调可持续发展等. 这是中华民族优秀文化传统与现代先进的思想观念有机结合的产物. 如"以人为本"，是仁义、善良思想同人本主义相融合的结果，数学可以通过提高人的素质，提高生活和生命的质量；效率意识发扬了中华民族艰苦奋斗、勤俭节约的精神（后来概括为多快好省，进而改为又好又省又快），而和谐的意识，倡导和平、和睦、和谐、合作，和而不同，和衷共济，正是自黄帝始，流传至今的和合思想的发扬光大，讲究人间和谐，人与自然的友好，讲究求同存异，讲究善良和美，讲究中庸适度，这正合乎数学的本性（数学本身是无矛盾的、相容的、和谐的系统），GH 讲究和谐统筹，如科学技术教育与文化修养的培育，人的身心发展和健康，德智体美全面和谐发展，教学、学习、研究同步协调，知识能力、思想情感教育结合，合情、演绎、辩证推理并重等，都说明了这一点.

（2）具有明显的辩证性质. 如原则中的既教猜想又教证明，两者是一对矛盾；知能教学与思想、情感教育是一对矛盾；技术教育与文化教育是一对矛盾；教学与学习、教学与研究、学习与研究又是 3 对矛盾；素质教育与解题应试能力的培养也是一对矛盾；刻苦学习与快乐学习等，将它们相互协调，相辅相成，将体现高超的教学艺术. 可见 GH 是一种讲究辩证法，导致高超的教学艺术的教育方式.

（3）与时俱进的开放性. GH 是 MM 的一种有重要意义的发展. 首先，旗帜鲜明地提出了贯彻落实科学发展观，这是我们党在新世纪为我国的发展，提出的战略指导方针，数学的发展，数学教育的发展，当然不能例外. 其次，学生的问题意识与思维批判性、科学思维方式（如非线性思维、混沌思维、复杂适应系统论、广义对称思想、不可能性与自知自限的思想意识等）、辩证思维、情感教育、数学语言教学、

效率意识等，都是科学界、教育界的热点话题.

（4）深入贯彻“以人为本”的原则. 在教学中努力强调尊重学生主体地位，提高他们的主人翁责任感，强调通过帮助学生确立正确的学习观和学习方法来自我提高学习成绩，各种教学举措都是为了学生全面协调发展. 同时，在实验中，要强调学生也是GH实验的积极参与者，是实验的主人，通过在实验班学生中建立“GH课题组”提高参与度，努力纠正“学生是实验品”的错误认识.

（5）明确了数学学习、研究、思考、考试等，能提升人的身心健康水平.

（6）凸显了它着意抓双基教学，从而继承和发扬传统数学教学中科学合理的举措，这主要表现在把“数学语言的教学”作为一个变量，把知、能、思、情教育结合作为一条原则，把“辅导”作为重要教学环节等.

（7）兼顾了“大多数”学生和高才生、尖子生的培养，又为学困生的进步提高做了多方面的考虑，如它对学习、研究方法的强调，倡导小先生（对尖子生、学困生双双有利），它倡导开展数学课外活动，倡导“以人为本，不以纲、本为本”，为加速学习扫清了“习惯性”障碍.

（8）它的“水涨船高”的思想，把“应试能力”看作学生全面素质的水上之船的思想，它把“学生素质全面提高”作为教学主要目标加以实现，同时运用“一般解题方法”大幅度提高应试能力，而且所产生的各科成绩与数学同步提高的效应，既兼顾了国家和学生的长远利益，又满足了广大人民群众金榜题名“送子升学”的眼前需要.

因此，受到广泛的欢迎.

自2006年4月文献[9]出版以来，我们先后去新疆喀什、昌吉（的奇台）、湖北（鄂州）、深圳等地介绍，受到广泛欢迎和积极评价，在鄂州二中、天津河西区几所学校的初步实验中，即观察到若干预想的效果，我们还将在新疆喀什、昌吉、天津、北京朝阳区、安徽安庆市、深圳的若干所中小学进行实验. 欢迎参与.

[参考文献]

[1] 林夏水. 数学观对数学及其教育的影响[J]. 数学教育学报，2007，16（4）：1–4.

[2] 希尔伯特. 数学问题[M]. 上海：上海科学技术出版社，1981.

[3] 徐利治. 徐利治论数学方法学[M]. 济南：山东教育出版社，2001.

[4] 杨世明，袁桂珍. 论“数学的心脏”——希尔伯特方法论第一问题的初步研究[J]. 数学教育学报，2006，15（2）：38–40.

[5] Paul Ernest. 数学教育哲学[M]. 上海：上海教育出版社，1998.

[6] 王光明. 数学教学效率论[M]. 天津：新蕾出版社，2006.

[7] 运怀立，杨之. MM教育方式与当代数学教育[J]. 数学教育学报，2005，14（4）：74–77.

[8] 徐沥泉，杨世明. 数学方法论的数学教育方式——数学哲学与数学教育的联姻[R]. 2005年全国数学哲学讨论会，上海，2005.

[9] 洪双义，杨世明，王光明. 一种新型的数学教育方式：GH——对“MM教育方式”的实验探索[M]. 北京：中国教育出版社，2006.

Science Development Concept and Mathematics Education

HONG Shuang-yi[1], YANG Zhi[2]

(1. Hexi Distract Education Center, Tianjin 300200, China;

2. Baodi Teaching Institute, Tianjin 301800, China)

Abstract: Science development concept was the important strategy concept to lead our country's economic development. How to put this concept into mathematics education was the hot spot problem in mathematics educational area. It was the aim that instruct the education pattern of high efficiency and harmonious. The education pattern of high efficiency and harmonious was the upgrade of the mathematical methodology education pattern.

Key words: science development concept; development; continual and in the round and harmonious; MM education method; GH mathematics education method

[责任编校：陈汉君]

试论数学教学“过程化”及课件设计的“序”

张桂芳

（广西教育学院 数学与计算机科学系，广西 南宁 530023）

摘要：计算机使数学教学过程化比过去更容易实现了．为保证计算机应用于数学课堂教学的科学性，我们需要设计计算机支持下的数学课堂教学模块，需要树立3个基本观念；遵循两种序：安排教学的逻辑程序及其相联关系，构建学习认知程序．它们构成了计算机应用于数学课堂的经纬，体现着“教与学对应”的教学基本原理和“教与数学对应”的数学教学基本要求．

关键词：数学教学；过程化；课件；序

中图分类号：G422 **文献标识码**：A **文章编号**：1004-9894（2008）02-0093-04

1 数学教学过程化及计算机的支持

1.1 数学教学“过程化”

数学学习本质上是知识建构的过程．当学生通过观察、操作、猜想、实验、交流、反省等活动逐步建构数学知识时，他们实际上就以“探究”的方式经历了数学知识的发生、发展过程，因而课堂中的探究性势必成为“促进知识建构”的教学核心．这就需要把课堂教学当作一个以各种探索、发现活动贯穿的“总过程”，一条由多个微活动、微过程串成的“链”．如在 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的教学中设计 $\sin(x+\frac{\pi}{3})\to\sin(x+\phi)\to\sin(2x+\phi)\to\sin(\omega x+\phi)\to 3\sin(\omega x+\phi)\to A\sin(\omega x+\phi)$ 的活动链，使之构成了一个从常量系数到变量系数到规律性结论的认识进程．数学课堂教学的这种基于“过程”的手法，凸显了其“进程”（活动内部的微结构及其相互联系与顺序）的特点，我们不妨将这种“活动链”的组织形式称为数学教学的“过程化”．从教的角度来说，其内容包括提供有层次的背景材料、问题情境，和为初步结论的辨析提供的有层次的动态变式，还包括渐进的实验、操作型情境及应用情境，用以揭示数学知识的凝练过程，揭示公理、定理、公式的内部结构以及数学知识之间的联系等，从而还原数学知识的过程性．从学的角度而言，它是展开观察、操作、归纳、猜想、符号表示、推理、交流以及给出证明等数学活动的进程．这种活动链并不等同于教学过程的全部，也不是指教学过程的某一个环节，而是展开各个教学模块的共同方式．教师备课时需要对教学内容进行解剖、并转化为教育形态的数学，其成果就是过程化教学．过程化课堂教学是必要的和广泛存在的．

1.2 计算机对数学过程化教学的支持

过程化课堂教学是由一个个教学模块整合“教”与“学”双方的诉求而成的．我们不妨以数学新授课中学习的知觉辨认阶段为例．在这个阶段，教师需要设计教学，从典型实例出发，给出包含本质属性及其变式、正反方面的例子，让学生做一定操作（观察、猜想、验证、运算、倾听等）以对各种事例进行对比，从而强化知觉辨认的结果．这个过程中计算机的支持可以从提供表象作为学生的直觉模型开始．如图1就是“直线平行的条件”的直觉模型之一．但这个模型的逻辑关系还必须再经过一定的“变化”运动过程才能被揭示出来（如：是先同位角相等才平行，还是先平行才同位角相等？）．于是需要这样的实验过程：让某些直线（如 l_2）运动，在任何时刻，只要同位角相等则两线（l_1、l_2）平行．由此可以看到：(1)计算机对数学学习需要突破单纯静态图片演示的水平、达到作为实验工具的水平[1]；(2)要充分重视计算机对过程化教学的支持．计算机对数学教学过程化的支持，就是支持教师把学习活动展开成一定的探索、加工、发现的程序，促使学生在活动中体验数学任务、数学地思考和思考数学．这方面的实例其实很多．如，在“直线与圆的位置关系”（初中）的教学中，我们不应只是简单地用计算机演示3幅与3种位置关系分别对应的静态图片进行分析，更要将3种位置关系的形成寓于运动过程中（圆相对于直线的运动或者直线相对于圆的运动），并在这个过程中激励学生思考：用什么区分3种位置关系？3种位置关系各有什么性质？如何刻画它们？……以及用计算机验证学生得出的初步猜想等．

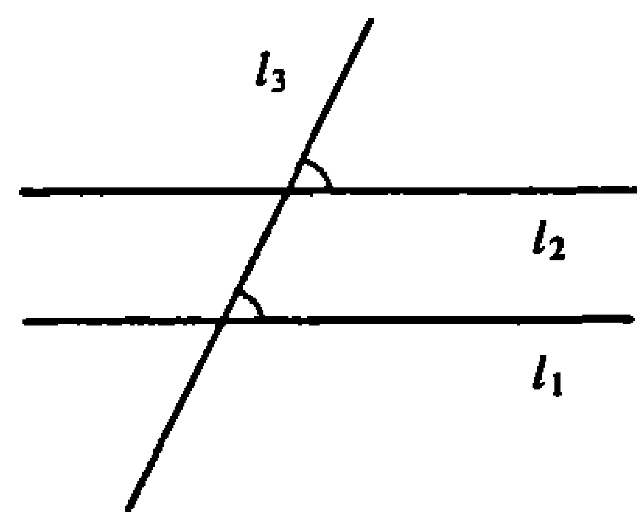


图1 直线平行

计算机比传统的教学手段更易于实现数据、图形、场景

收稿日期：2007-12-05
作者简介：张桂芳（1974—），女，壮族，广西大新人，副教授，硕士，主要从事课程与教育教学研究．

的即时处理，它使教学过程化比过去更容易实现了．事实上，不少专家学者早就对计算机的“仅仅追求形象生动却不能促进学生思考、单纯用直观形象描述数学”的表面式应用提出了异议[2-3]，并强调“需要借助计算机揭示数学知识的形成过程”[4-6]．这表明，人们已经认识到计算机在“支持数学教学过程化”方面的重要价值．然而，“揭示数学知识的形成过程”并不等同于或者附属于“单纯用直观形象描述数学”，为保证计算机应用于数学课堂教学的科学性，我们需要给予“计算机支持数学教学过程化”独立的、充分的注意，关注课堂教学的过程化设计和处理，真正落实计算机对数学教学过程化的支持．

2 数学过程化教学的课件设计

设计数学过程化教学的课件，实际上就是设计计算机支持下的教学模块．我们的课堂教学需要避免利用计算机满堂灌（电灌），要把握好课堂教学中应用计算机辅助教学的“度”，针对课堂教学的各个环节设计相应的教学模块，需要采用“片段式”的课件组织模式[7]．但“教学有法而教无定法”，我们需要更为关心：设计计算机支持下的数学课堂教学模块有没有一些共同的规律？如何整合数学课堂中的“教”与“学”的诉求？

2.1 设计计算机支持下的数学课堂教学模块的基本观念

由于计算机应用于数学教学的重点在于用计算机有效地改进教学[8]，出发点是数学课程本身，我们必须强调计算机服务于课程、顺应数学教育的特点、符合学生学习数学的需要．因此，我们必须明确：（1）教师利用计算机“教”，是为了促进学生对数学知识的探索；(2)学生在计算机支持下“学”，是为了实践探索知识的过程；（3）教学是双边活动，这两个方面是统一的，教学必须实现“教”与“学”的整合．唯其如此，才能保证我们的课堂教学不偏离数学学科的目标，保证计算机的应用顺应学生心理特点、数学学习的规律．

2.2 课件中的“序”及其实现

由上，计算机支持数学教学“过程化”受着某些内在规定的制约，而这种制约体现在教学活动的进程之中、与“序列”有密切关联，我们不妨称之为“序”．正如教材为教学活动提供基本线索，课件是教师加工教材、设计教学模块的成果，是基于计算机的学习活动材料的组织体系，也是重要的教学资源，因此，下面将重点探讨数学课件需要遵循的两种“序”．

（1）课件内容结构上的“序”：教学的逻辑程序及其相联关系．

高中数学课程标准指出“信息技术与数学课程内容有机整合的原则是有利于学生对数学本质的认识”．数学学科特点决定了数学思维有严格的逻辑顺序，数学知识本身具有特定的逻辑结构[9]．而从直觉中获得的经验只有以逻辑为基础才能保持其正确性，逻辑基础的缺失将会对正确获得概念形成负面干扰．所以，这些逻辑结构能否得以充分揭示，关乎学生能否直达“数学知识的实质”．因此，为保证教学内容的学科性和正确性，课件设计必须考虑教学的逻辑程序及其相联关系、使之成为知识的优秀载体．这包括两个方面：

其一，学习活动的进程需要按照教学内容中隐含的逻辑关系和形式体系展开．下面以“直线平行的条件”（初中《数学》人教版七下）的教学设计为例做一些分析．

依据前述直觉模型，按照“平行条件”的逻辑结构，必须把“角”作为“因”、“平行”作为“果”，即必须先有一些大小有变化的角度的材料（已知），才能概括出判断直线平行的依据（未知）．在合作研究的过程中，我们曾设计并实施了如下命题获得阶段的课件片段：

提供多个有两条已知直线 a、b（未必平行）被第三条直线所截的实例．利用计算机对其中同位角相等的各个实例模型分析：用动画将 a、b 两线中的一条向另一条运动（第三条直线不动），结果两线重合（说明在原位置上两线是平行的）；对其中同位角不相等的各个实例模型也类似分析以说明在原位置上两线是不平行的．然后再综合分析：另外出示三条相交直线 l_1、l_2、l_3，l_1、l_3 固定不动，让 l_2 转动、利用“度量”功能控制动画，当 l_2 转到 l_1 与它自己被 l_3 所得的同位角相等的位置时，再将 l_2 向 l_1 平移，发现两线平行，初步概括、表达“条件”．

猜想：凡同位角相等，两线必平行吗？再用几组同位角相等的“三线八角”实例如上检验，发现凡同位角相等，两线必定平行．

用计算机演示两次画平行线的过程(使三角板紧靠直尺运动)．再让个别学生在实物投影仪器上，展示自己依据三角板上不同的角度画平行线的过程．并配合计算机对数量关系的透视（“度量”功能）揭示其中隐含的数学规律：画平行线（形）的过程实际上就是画相等的同位角（数），使定理中的“数”和“形”结合起来．

所以，要判断两直线平行，需要找角……

我们设计了一个个学习活动（微过程），形成一条学习活动链；在每个微过程中，与传统教学手段相配合，计算机则以动态实验、“透视”数量关系的方式融进学生由“直观”到“抽象”的认识过程中，成为学生同时调动多种思维形式进行探索、建构结论、获得命题的有利工具．

而在课堂调研中，我们也发现个别教师的课件采用了这样的“过程”：*演示固定的平行直线 l_1、l_2，一直线 l_3 与 l_1、l_2 都相交，l_3 截 l_1 与 l_2 得到一些角；然后通过动画让 l_3 向左、向右转动；在转动过程中，所截得的角的大小发生变化，但总有一些角度相等*……其逻辑顺序是从“固定的两条直线 l_1

与 l_2 的位置关系”（因）到“当第三条直线转动时，截得的某些角相等”（果）的；它只能检验“当有两直线平行时必有某些角度相等”的论断，即它适合用以揭示平行线的性质，而不适于应用在“两直线平行的条件”的教学中．按照这个课件片段教授“两直线平行的条件”，“同位角大小的变化决定着两条直线位置关系（平行与否）”的过程必然只能由教师“告诉”学生了．由于课堂上计算机演示的“事实”与所学知识的逻辑内核因果倒置，就极易引起学生思维上的混乱和概括的困难．可见，我们必须贯彻“教”与“学”相整合的观念，立足于数学知识内在逻辑关系和形式体系的过程化来设计课件，决不能使二者相悖．

其二，课件所刻画的数学对象须严格按照数学定义、原理（特别是尺轨作图原理等）作出．以几何画板环境下三角形外接圆的作法为例．如果是先作一个圆、再取圆周上的 3 个点来作三角形，虽然可以满足学生的直观形象感，但作图过程显然与“先有三角形才有外接圆”的内在规定不符，因而会丧失当堂作图、动态揭示数学关系的教学价值．由于三角形的顶点是“外接圆”的子女，它们将不是平面上完全自由的点而被限制为只能在“外接圆”圆周上运动，3 个顶点将不能控制外接圆的变化，因而我们将难以在这样的课件的基础上，利用三角形的大小和形状同时改变来进一步研究以三角形外接圆为基础的其它复杂图形的性质（进一步做数学实验）．这将导致课件的重复利用率降低．对此可如此改进：作 3 个自由点决定的三角形→作两条边上的中垂线交点→以交点为圆心、三角形的任一顶点为圆周上的点作圆……虽然几何画板为我们提供了在课堂上即时作图开展数学实验的平台，但只有严格按照数学关系作出来的图形（最一般的图形）才可能使学生超越单纯的视觉感受、见习数学知识本质的刻画．这样的课件，只要稍加改造，就可以重复运用到更多相关内容的教学中去以节省教师的工作量．同一课件能否重复利用，也完全取决于教学内容的逻辑规定．不同的教学内容，课件中采用的作图方法、顺序必然不同．

课件在展开学习活动时适应数学的学科特性、顺应教学内容中的逻辑成分，将更能促进学习材料与学生在特定情境下的学习心向相匹配，计算机才有可能真正成为学生触摸数学知识本质、发展思维能力的工具．有专家学者针对数学的各种内在因素对数学教育的决定性作用，提出了“教与数学对应”的原则[10]，遵循上述“序”的要求，实际上就是计算机对“教与数学对应”的基本要求的实践．

（2）课件思维结构上的“序”：构建学习认知程序．

上述课件片段构筑了一个脉络清晰、与学生建构数学知识的进程一致的学习认知程序：“观察、归纳——猜想——验证——概括”．这种活动组织模式将“数学课堂教学过程化”在命题获得阶段具体化了，既体现了计算机相对于传统教学手段的优越性，又使计算机超越了单纯的演示和播放媒体的功用，在学习活动链的展开中与发现式教学紧密融合起来了．沿着这条认知活动链，学生的思维空间突破了“独立思考”、“练习”或者“想一想”等教科书上预留的环节，活动中的思维碰撞、互动更能促进他们根据自己的体验、用自己的思维方式、重新创造有关的数学知识，进而强化他们认识活动的自觉成分．其间，学生不止是在活动中完成了数学知识的逐级抽象过程，有机会体验形式化的数学内容背后隐藏的探索精神，更获得了策略、方法等过程性知识的体验．而且，我们还可以看到“教”与“学”是怎样被整合起来的：计算机是以“实验工具”的形式来支持教学过程化的，但实验必须以学生建构数学知识的进程为基础．利用计算机为学生构筑“重建数学知识”的认知程序，可以使数学结论的凝练过程与学生的主观认识进程和谐统一，增强学习活动的主动性，它既与“数学学习的再创造性”相一致，也是对“教与学对应”的教学基本原理的实践．

基于数学教育的双逻辑起点特性[11]，数学教学必须沿着“教与学对应”的原理和“教与数学对应”的原理双重轨道进行[10]．因此，课件设计的这两种“序”势必无法割裂而成为计算机支持数学教学过程化的经纬．至此，我们可以将数学过程化教学的课件设计概括为两条原则：（1）安排教学的逻辑程序及其相联关系；（2）构建学习认知程序．这实际上是数学教学原理对课件设计的内在的具体规定，因而就是设计计算机支持下的数学教学模块的两条原则．

3　两种“序”的意义

以上仅仅是对知识形成阶段的一些侧面进行探讨的结果，还没有形成完善的体系．但可以肯定，立足于课堂教学的“过程化”是计算机支持数学教学所具有的最鲜明的特色，也是其具有高性价比的体现．遵循课件设计的两种“序”，落实了设计计算机支持数学课堂教学模块的基本观念，构成了计算机支持数学教学过程化的经纬．它们有助于教师分析计算机对数学知识本质的揭示是否到位（即教材、教学内容中的逻辑结构能否得到最好的表达和展现），从而避免计算机的支持游离于数学内容之外；它们是教师利用计算机将数学知识的学术形态转化为数学知识的教育形态、把数学化的过程变成适合学生活动的过程的有效线索，有助于防止计算机的支持游离于学生的思维建构活动之外，和不包办学生的思考、不限制学生思维发展，从而减少“电灌”的可能；它们也将促使教师根据学生的学来设计自己的教，在课件中整合自己教学设计、创意、风格，贯彻启发式教学的原则．我们不妨把上述数学课件符合数学学科特点、符合数学学习规律、教学实际的要求称为数学课件的学科化．如果说信息技术与课程整合的核心是“变革传统的教学结构”[12]，则数学课件的学科化保证了数学课件的科学性，因而是计算机影响数学教学结构的立命之本，是实现计算机工具有效支持数

学课堂教学的重要原则之一.

[参 考 文 献]

[1] 张桂芳. 计算机对数学学习活动的三种支持水平[J]. 数学教育学报，2006，15（1）：95.
[2] 张波，钱林. 计算机与数学教学整合中的几个特殊关系[J]. 数学教育学报，2002，11（1）：79.
[3] 袁智强. 关于计算机辅助数学教学的调查与分析[J]. 数学教育学报，2002，11（2）：95.
[4] 潘巧明，张维忠. 计算机技术与数学创造性思维培养[J]. 数学教育学报，2002，11（4）：59.
[5] 课题组. 高中数学课程教材与信息技术整合研究与实验[J]. 课程·教材·教法，2004，24（3）：47.
[6] 吴华. 数学计算机辅助教学的设计原则[J]. 数学教育学报，2006，15（2）：84.
[7] 张桂芳. 对片段式课件辅助数学教学的思考[J]. 中学数学教学参考，2005，(1~2)：116.
[8] 郑毓信. 数学教育：从理论到实践[M]. 上海：上海教育出版社，2001.
[9] 喻平. 数学教育心理学[M]. 南宁：广西教育出版社，2004.
[10] 涂荣豹. 论数学教育研究的规范性[J]. 数学教育学报. 2003，12（4）：2.
[11] 单墫，喻平. 对我国数学教育研究的反思[J]. 数学教育学报，2001，10（4）：7.
[12] 何克抗. 信息技术与课程深层次整合的理论与方法[J]. 电化教育研究，2005，(1)：7.

Process of Computer-based Mathematics Teaching and its Sequences

ZHANG Gui-fang

(Department of Mathematics and Computer Science, Guangxi Institute of Education, Guangxi Nanning 530023, China)

Abstract: Supporting the process of mathematics teaching manifests the most important value of computer during the classroom. The sequences of the computer-based mathematics teaching, which refer to the logic in the mathematics knowledge and the cognitive environment for students to reconstruct the mentioned knowledge, constitute the orderliness for computerized classroom mathematics teaching, reflect the mathematics education principle of teaching responding to learning and teaching responding to mathematics, and manifest the penetrative influence of computer technology upon the structure of the mathematics instruction

Key words: mathematics classroom teaching; process; courseware; sequences

[责任编校：周学智]



书 讯

西北大学数学与科学史研究中心、北京师范大学数学科学学院 曹一鸣 教授著作的《中国数学课堂教学模式及其发展研究》一书，于 2007 年 9 月由北京师范大学出版社出版.

该书对中国数学课堂教学模式进行了深入浅出的论述，主要章节如下：

第一章 绪论
第二章 数学教学模式从实践到理论
第三章 数学教学模式的构建
第四章 中国传统数学教学模式
第五章 现实的数学课堂教学实证研究
第六章 传统教学模式的现代发展
第七章 当代数学教学模式研究
第八章 基于信息技术的数学教学模式
第九章 数学教学模式的重构与超越

该书定价：23.80 元 邮购地址：天津市河西区卫津路 241 号 天津师范大学八里台校区 129 信箱（300074）

联系人：陈汉君 电话：022-23541034

第17卷第2期 数学教育学报 Vol.17, No.2
2008年4月 JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION Apr., 2008

计算机辅助数学教学的若干问题

王立冬，袁学刚，刘延涛

（大连民族学院，辽宁 大连 116600）

摘要：计算机辅助数学教学存在的主要问题有：夸大CAI作用，忽视传统教学；评优课、公开课现形，随堂课销声匿迹；认为搞好计算机辅助数学教学必须“精通”计算机；追求软件的“外在美”，忽视软件的“内在美”；流于形式，用计算机代替板书；交互性差，没有突出学生的主体地位；重视课内，忽视课外；只注重计算机操作，忽视师生情感交流；重视演示现象、说明问题、传授知识，忽视揭示过程、培养抽象思维能力.

关键词：计算机辅助数学教学；问题；对策

中图分类号：G434 **文献标识码**：A **文章编号**：1004-9894（2008）02-0097-03

计算机的出现，网络技术的运用，信息时代的到来正在给教育带来深刻的变化. 正如人们已经意识到医疗技术的更新改变了医疗手段、医疗方法一样，以计算机为核心的新教育技术的运用也会促进教学手段、教学方法、教学理论的变革. 如何在先进教育理论的指导下，发挥计算机辅助数学教学的作用，促进数学教学改革的深入已越来越引起人们的关注. 计算机辅助教学是指为实现一定的教学目标而使用计算机进行教学的过程，即Computer Assisted Instruction，简称CAI[1]. 计算机能将文字、图形、动画和声音有机地编排在一起，可以激发学生的兴趣，增强学习的积极性，给学生提供更多的动手机会，特别是计算机的人机交互功能，为实现教学的“个别化”创设了理想的环境[2]. 对数学教学而言，特别令人欣赏的是计算机的快速计算本领与绝妙的处理图形的能力. 把计算机引入数学教学后无疑会对数学教学产生深刻而广泛的影响，它不单会影响到教学内容的变化，而且将引发教学方法、教学模式、教学观念等一系列的变革，它将改变数学教学的面貌. 但在使用计算机进行实际教学的过程中，还存在着诸多问题.

1 教师的观念上的问题

问题之一：夸大CAI作用，忽视传统教学.

在计算机辅助数学教学过程中，有一种夸大了CAI的作用的倾向，姑且称之为代替论. 主要表现在以下3个方面：其一，代替传统教学媒体. 的确，CAI在数学教学中显示出前所未有的优势，是传统的教育媒体不可比拟的. 但是，传统的教学媒体也有着自身的特点（如制作周期短、制作成本低、操作简便等）. 例如，在对圆锥曲线进行总结时，我们可以把椭圆、双曲线、抛物线的标准方程、图形、焦点坐标等性质以图表的形式写在幻灯片上，而无需再用电脑演示. 因此在选择教育媒体时，应注意媒体产生的功效与需要付出的代价之间的比例. 在教学中，有些教师就把计算机当作了高级投影仪，运用计算机进行教学不是为了解决重点、难点，而是在摆花架子. 还有些教师认为什么课都可以制作课件，都可以运用课件来完成. 殊不知有些学科的内容用传统的教育媒体完全可以讲清、讲明，并且可以让学生理解的. 那么为什么要舍本求末呢？其二，代替教师的主导作用. 教学过程有教师、教学内容、教学对象和教育技术4个基本要素. 其中教师是主导，教学对象是主体，教学内容是信息，教育技术是手段. 他们之间是相辅相成的关系，是互不代替的关系. 由于课件具有较强的交互性和可控制性，使得许多教师误认为计算机完全可以代替教师的主导作用，他们把整堂课的内容制成了课件，上课时教师的工作只是播放一下课件. 其实，CAI在很多方面存在着缺陷，如缺乏教学机智，不具备人的可应变智能. 尽管许多课件有着人工智能，但对于课堂上出现的突发事件，计算机很难做出科学的判断而采取有效的方法. 计算机是没有思想、不具判断力的教学设备，它只是起着帮助教师把教学内容更容易地传授给教学对象. 其三，代替学生的参与. 计算机可以模拟现实，例如，在有些具有危险性的实验中可以用计算机来模拟整个实验过程. 然而在有些实验中模拟现实，往往会适得其反，对培养学生科学的学习方法，正确的学习态度也有负面影响. 教师教学不仅要传授给学生科学知识，而且要培养学生获得科学知识的能力.

与此同时，心理学研究也表明，媒体都会有干扰因素. 信息越多，干扰因素越多. 教师如不顾实际情况，刻意使用现代化手段，这样反而会分散学生的注意力，势必影响整体教学效果. 我们应意识到CAI要立足于“辅助”. 在教学实践中，并非所有的教学环节都能由计算机来完成，许多传统的教学活动仍然必不可少，计算机只能作为数学教师的助手，而不应该替代数学教师. 过分强调计算机的作用，会导致乏味的操作，对学生直观思维、创造性以及想象能力可能造成不利影响. 当演示的演示，不当演示的不演示，毕竟数学有培养学生抽象思维能力的任务，动不动就用声、光、电全方位演示，将会压抑学生自由想象的空间.

问题之二：评优课、公开课现形，随堂课销声匿迹.

每到公开课、评优课，几乎每位教师都要使用CAI，而且评奖等级越高的课用得越多. 甚至在一些学校、一些地区的“好课”评比中，组织者把“是否使用了计算机”作为评比标准之一，使得教师不管是否需要计算机来辅助，也都用上了计算机. 而在平时教学中则很少有人用，甚至无人用了，

收稿日期：2008-02-12

作者简介：王立冬（1955—），男，吉林德惠人，教授，大连民族学院院长，主要从事数学教育与拓扑动力系统研究.

学校的多媒体教室也随即闲置一边．把 CAI 作为好课评选的标准是对 CAI 的误导，这甚至让计算机操作水平还不太高的教师闹出一些笑话．一堂课的好坏是看有没有以先进的教育思想作为指导，教学效果怎样，而不是使用了何种媒体．同样，教师工作重点在教育教学，如果投入大量时间精力只为了上好一节计算机辅助教学课，这显然本末倒置，得不偿失．我们可以看出，CAI 对教师的要求非但没有降低，而是更高了．教师不仅要能熟练驾驭传统教学，而且还要具有现代教育观念，掌握现代教育技术，能够熟练操作应用计算机辅助教学的软件且具备一定的审美水平，熟练调用声音、视频、图形、动画等课件素材．只有这样，教师在教学中才能得心应手，也才能真正把 CAI 带入数学随堂教学中．

问题之三：搞好计算机辅助数学教学必须“精通”计算机．

开展 CAI 的实验不懂得计算机的基本操作当然不行，但是未必需要“精通”计算机．搞好计算机辅助教学最重要的条件是熟悉本学科的教学规律，了解教学的需要．从事学科教学的教师如果能够懂得计算机的基本操作，选择好适合本学科的操作平台就可以把 CAI 搞得“有声有色”．《几何画板》是一个适合中学数学教师使用的操作平台，只要熟悉 Windows 的基本操作，经过几天的培训或者认真学习它的《操作手册》，就可以制作一些简单的课件了．一旦熟悉了它，制作一个课件只要几分钟，最多也就一两个小时，而且它操作简单，使用它像使用圆规、三角板一样．

2　CAI 制作及应用方面的问题

问题之四：追求软件的“外在美”，忽视软件的“内在美”．

利用计算机多媒体技术进行辅助教学，能够活跃课堂气氛，鼓励学生主动探究，从而提高教学质量与效益．但在实际操作中，会出现运用 CAI 仅为教学改革装饰门面、制造表面效果的情况．一些教师在引入 CAI 时，不是从教学内容、学生的实际及教学方法等需要出发，而是从所选内容是否有利于界面表现、有无观赏性出发，导致 CAI 出现形式主义．有的是过于重视技术形式的外在表现，在界面的画质、配音、动画等效果上过分做文章，导致画蛇添足、喧宾夺主，违背了学生的认知规律，分散了学生的听课注意力，冲淡了学生对学习重点、难点的关注，同时也偏离了先进技术应用的目的，对教学改革和提高教学质量难以产生良好的推动作用．应该明确，不管教学工具多么先进，它只能是教学的辅助手段，CAI 也不例外．我们提倡课件应该有好的界面，操作简单、方便，但“界面好”与“华丽”不是一回事，特别是作为辅助数学教学的计算机软件，更应该把解决数学教学中的问题放在第一位，追求软件的内在作用，而不是外在的所谓“美”．“数学美”是数学内容的和谐、结论“奇异”的内在美，对学生“数学美”的教育与熏陶应放在教学内容上．

问题之五：流于形式，用计算机代替板书．

这是教师在使用计算机时普遍存在的现象．有的课堂上教师没有任何板书，计算机成了一块电子黑板，电教课成了教案搬家．有些教师为图方便，请计算机教师帮忙，将课件设计成顺序式的：按键，出现课题；按键，出现例题……这样的课成了流水课，教师成了解说员，由传统的满堂灌变成了有电子特色的满堂灌．用计算机代替教师的板书是对资源的一大浪费，也是对教师时间精力的一大浪费，同时也抹杀了教师的个性特长[3]．

问题之六：交互性差，没有突出学生的主体地位．

现代教育模式与传统教育模式的根本区别就是把以教师为中心的教学转变为以学生为中心的教学．从这里可以看出，不能教学设备现代化了，而教学思想却是陈旧的．“教育要面向现代化”首先应该是教育思想的现代化．成功应用 CAI 的主要标志应该是：有利于学生主动参与，有利于揭示教学内容的实质，有利于课堂交流的高效实现，有利于学生思维和技能的训练．一方面，目前使用的 CAI 课件大多还只是在改变教师的如何“教”上下功夫，用计算机来帮助教师说清用其它教具所不能说清的问题的教学模式占多数，很少用计算机来帮助学生学的，即以“教”为主的教学设计多，而以“学”为主的教学设计少．另一方面，忽视课件的“交互性”，即使有“交互性”的课件也是在教师设想范围内的“交互性”．一个独立的 CAI 课件一旦形成，其内容及流程就会固定下来，在课堂上不可能再发生变化．课堂教学作为一种认知活动，其明显特点是师生相互交流、相互影响．这就必然造成教学过程中会出现一些“意外”事件，而 CAI 课件不可能把这些也纳入流程，这就排斥和限制了师生“教”与“学”的交流过程，降低了课堂教学的丰富生动性．当课堂上出现课件以外的事件时，授课教师或是放弃或是回到传统模式上来．因此，CAI 课件一方面要适合教师的教学需要，另一方面作为一个课件，应具有启发性，要满足不同层次学生自主学习的需要[4]．

问题之七：重视课内，忽视课外．

目前，CAI 还只局限于课堂上的使用，而忽视课外对学生的辅导．即使有一些课外的所谓多媒体教学光盘也不外乎是用于学生的练习、考卷，或者把课本内容罗列一下的“课本搬家”，或者是一些教师的“教学笔记搬家”．实际上，如果单纯做数学练习还不如传统的练习册．试想一下，学生在屏幕上看习题，又在纸上演算，方便吗？如果再加上限时操作，计算机在旁边“读秒”催着做题，能有利于学生思维的展开吗？能不能把课堂上教师用来演示或者启发学生思维、发现问题的教学软件也让学生拥有，学生在家里用这些软件再进行一次概念认知、发现问题、解决问题的实践，即注重学生能力培养的课外辅导软件多一些，而不是练习，这样做才是努力减轻学生负担，实现素质教育[5]．举例来说，图 1 就是一个用来教三角函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图像的软件，屏幕下方提示学生拖动点 A、Ω、Φ 改变 A、ω、φ 的值，然后观察给图像带来的变化，反复体验、总结规律．这样做的好处是让学习能力稍差的学生以再学习的

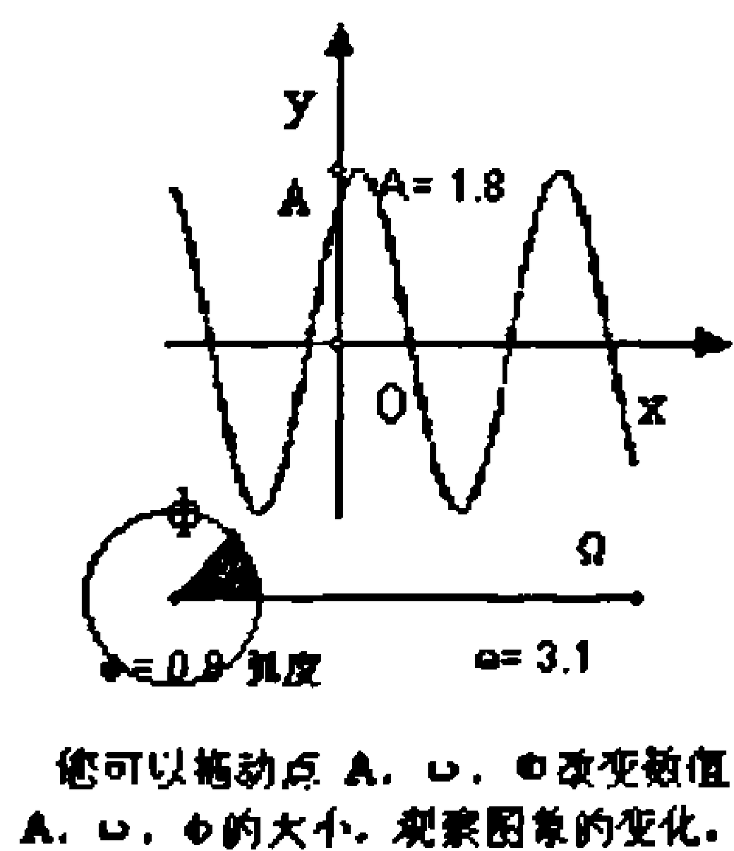


图 1　三角函数图像

机会，而不仅是回家再做练习．全面优化的课堂教学，无论是学生还是教师，在课后都应该可以将课堂上讲解的课件再次读取出来．学生对于不理解的环节，教师对于设计不妥的地方都可以反复观看，再次认识或者修改，这不仅降低了教师的工作强度，也极大地提高了学生的学习兴趣．

3　CAI 与数学教学整合方面的问题

问题之八：只注重计算机操作，忽视师生情感交流．

在课堂上，教师与学生之间除了知识的传授和技能的培养外，更重要的是师生之间的情感交流．这种情感交流的方式是多种多样的，通常有语言、手势、体态等．有时候教师的一个微笑、一个鼓励性手势，给学生的激励远比老师口头的表扬要强，这正是数学课堂教学的艺术魅力所在．多媒体辅助教学系统的运用，在师生的交流中加入了多媒体这个“第三者”，形成了教师—多媒体—学生 3 者交流的新模式．知识的传递要通过多媒体才能实现；教师关注更多的是多媒体的操作，学生的知识掌握和技能培养方面的反馈信息被忽略了，学生关注的是屏幕，脑子里思考着屏幕上显示的内容，教师的地位已经无足轻重．教师在学生心目中只是一个 CAI 系统的操作者，教师和学生的情感交流更是无从谈起．多媒体“统治”了课堂，人性化的师生人际情感交流被冷冰冰的“人机交往”所取代，它严重妨碍了师生课堂情感的互动．

问题之九：重视演示现象、说明问题、传授知识，忽视揭示过程、培养抽象思维能力．

是仅用计算机展示现象、传授知识，还是充分发挥计算机的“静”变“动”、微观变宏观、抽象变形等功能来培养学生的各种能力是不同教学观的体现．例如，在如图 2 中，上下拖动点 A 时，屏幕上 a 的值（点 A 的纵坐标）随之改变，相应的抛物线的开口大小、方向都在改变，反复拖动，学生经过观察能发现：当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下；a 的绝对值越大，抛物线开口越小，这确实是其它教具所不能实现的效果．但在进行这一内容的教学时，也可以只把点 A 在 x 轴的上方拖动，让学生观察当 a 取正数时，抛物线的开口的情况是怎样的．当学生归纳出“抛物线的开口向上、a 越大抛物线开口越小”的结论后，提问学生，如果把点 A 在 x 轴下方拖动，即当 a 取负数时，抛物线的开口等情况应该怎样？由此可见，同样是使用 CAI，仍然存在教学方法的选择、教学的精心设计．数学是一门特别需要抽象思维能力的学科，抽象思维能力的削弱不利于学生对数学的再学习，特别不利于今后高等数学的学习．传统教学对偏重逻辑能力培养的认知构建有一定的局限性，运用 CAI 开发学生形象思维的心理优势和学习潜力可以弥补这一缺憾．所以在数学教学中，一定要注意如何恰到好处地使形象思维和抽象思维优势互补、相得益彰．

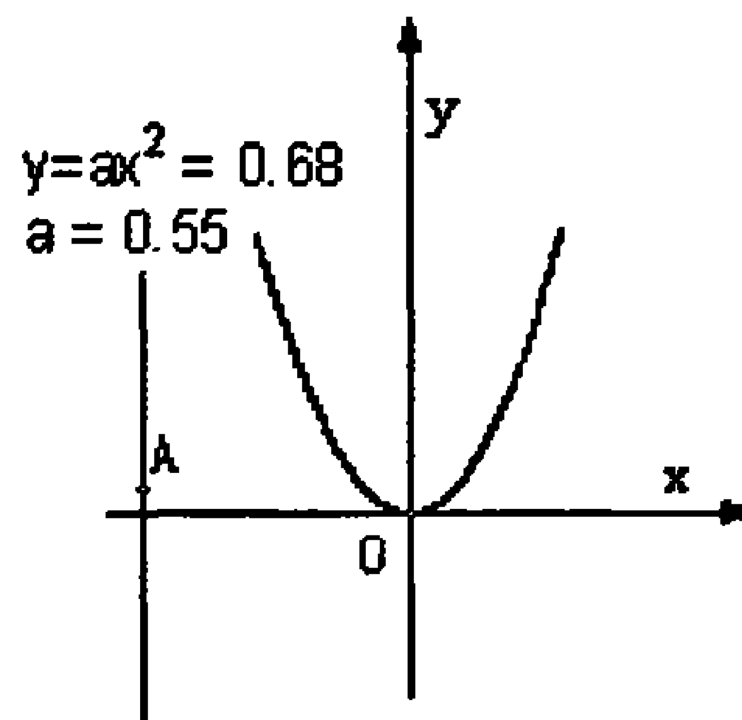


图 2　二次函数图像

计算机辅助数学教学是现代教育技术发展的趋势，它的出现弥补了数学传统教学的不足．我们应充分认识计算机是辅助教学，而不是主宰教学，要清醒地认识其利与弊，走出误区，按照“适合、适当、适时、适度”的原则发挥其巨大的优势，使其更好地为提高课堂效率和学生学习能力以及推动素质教育服务．

[参 考 文 献]

[1] 师书恩．计算机辅助教育[M]．北京：北京师范大学出版社，1993．
[2] 王吉庆．计算机教育应用[M]．北京：高等教育出版社，1992．
[3] 戚建平．数学教师要慎用善用多媒体[J]．中学数学，2002，(7)：8–9．
[4] 王松江．计算机辅助教学的误区与改进方法[J]．当代教育科学，2003，(8)：52–54．
[5] 吴以浩．计算机辅助数学教学的误区及反思[J]．中学数学教学参考，2001，(6)：59–60．

Problems of Computer-aided Instruction Mathematics

WANG Li-dong, YUAN Xue-gang, LIU Yan-tao
(Dalian College of Nationalities, Liaoning Dalian 116600, China)

Abstract: People had produced some mistaken ideas to CAI and these mistaken ideas mainly expressed in: Exaggerate CAI function, but ignore traditional teaching; Reveal in good lessons and public lessons, but go into hiding with hall lessons; Do well CAI in mathematics teaching must be proficient in computer; Pursue external beauty of the software, but ignore inner beauty of the software; Become a mere formality and replace the writing on the blackboard with the computer; The interaction is not good and there is no subject status of students; Pay attention to the lesson, but ignore it after class; Pay attention to the operation of computer, but ignore the emotion communication of teachers and students; Pay attention to demonstrating phenomenon, proving issue and teaching knowledge, but ignore announcing course and training abstract thinking ability.

Key words: CAI in mathematics teaching; mistaken ideas; tactics

[责任编校：陈汉君]

第17卷第2期 数学教育学报 Vol.17, No.2
2008年4月 JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION Apr., 2008

网络环境下高师数学教学内容组织和实施策略

刘秀梅

（连云港师范高等专科学校 数学系，江苏 连云港 222006）

摘要：网络环境下高师数学教学内容的组织要充分利用网络资源，依据先行组织者策略，制作具有数学特点的课件．对概念、定理以及命题等不同教学内容要运用解读符号、揭示概念、类比对比、“产婆术”、目标定向以及模式化方法等具有针对性的策略进行实施，达到网络教学环境下的教学最优化．

关键词：网络环境；数学教学内容；组织和实施；策略

中图分类号：G434 **文献标识码：**A **文章编号：**1004-9894（2008）02-0100-03

网络环境下的教学是指学生在教师的引导下把网络作为资源、把网络作为工具、把网络作为教学环境的一种新型的教学方式，这种教学方式给数学教学不仅带来了教学模式上的变化，也给高师数学的教学内容带来了组织方式和实施策略上的变化，那么，在网络环境下如何组织和实施高师数学教学内容呢？

1 网络环境下高师数学教学内容的组织策略

1.1 充分利用精品课程资源网站

教育部开展了国家、省、校三级精品课程创建评选活动，要求各参评学校建立了相关的精品课程网站，如中国精品课程导航网站，上面有内蒙古大学、中山大学、华东师范大学和北京师范大学的数学分析精品课程网站，同时各省内也有很多学校建立了精品课程网站，在 Google、百度等搜索网站上输入“数学分析精品课程”就会找到很多精品课程网站，这些网站为我们组织数学教学提供了良好的教学内容资源，我们可以广泛地搜取资料，从不同的角度，加工数学教学材料，从而丰富课堂教学内容．

1.2 充分利用国家数据库

在中国期刊全文数据库、万方数据资源系统、维普综合文献库等数据库上刊载了许多教师关于数学分析中相关问题的最新研究成果，为数学分析的教学提供了丰富的资源，特别是关于数学分析教学内容中的疑点和难点问题，都可以在上面找到答案，教师们应该充分利用数据库，为教学做好准备．如对拐点定义的讨论数据库中有数十篇文章进行讨论，会使我们澄清模糊认识．又如，当我们讲到方向导数与连续的关系以及方向导数与偏导数的关系时，单从教材上来看，并未给出详细的论述，但我们可以把教师们的最新研究成果充实到教学内容中，使学生明确3个概念间的关系，建立完善的知识结构，我们还可以查到缺项幂级数收敛半径计算的理论根据，给学生一个完整的知识体系，使教学达到最好的效果．

1.3 精心制作具有数学特点的课件

数学知识具有严密的逻辑性、抽象性，概念间的联系紧密，有必然的逻辑顺序，因此，在教学内容的组织上，要根据数学知识自身的特点，遵循数学知识发展的内在规律和学生的认知水平，对选择回来的材料，要精心选取，对课堂教学内容进行设计、加工和整理，从而形成实用的具有数学特点的课件，通过网络这个工具，进行教学．在组织概念的教学内容时，要注重概念产生的背景，对其合理性和必要性进行必要的论证和说明，要交待概念的内涵和外延，使之更科学化、系统化；在命题和定理的教学内容中，要注重数学命题间的逻辑关系，并进行适当的扩展，以丰富学生们的视野，为学生建构一个完善的知识结构体系．

1.4 “先行组织者”策略

“先行组织者”策略是由奥苏贝尔提出的，“是先于学习任务本身呈现的一种引导性材料”，“通过呈现‘组织者’，给学习者已知的东西与需要知道的东西之间架设一道知识之桥，使他更有效地学习新材料”[1]．我们知道，数学概念之间联系紧密，每节课要传授的新知识与旧知识之间有很大的关联，在传授新知识之前，必先设计好“先行者”，牢记“新知教学必有先行者，先行者必先行”的理念，为学生顺利学习新知识做好铺垫．如在我们讲授二元函数全微分的几何意义的时候，必先复习一下一元函数的微分概念及其几何意义，由一元函数在一点可微等价于可导，从而得出可微的几何意义是曲线在这一点存在不平行于 y 轴的切线，顺利过渡到二元函数在一点可微的几何意义是在这一点存在不平行于 z 轴的切平面，使学生在已有认知的基础上进行思维扩充，实现知识的顺利迁移．讲授二元函数的泰勒公式必先复习一元函数的泰勒公式，在两者之间建立起桥梁．

2 网络环境下高师数学分析教学内容的实施策略

数学分析的教学内容不外乎是概念或命题，命题是指给出肯定或否定回答的语句，定理是根据公理或已知正确的命

收稿日期：2007-11-29
基金项目：江苏省现代教育技术“十一五”规划课题——网络环境下高师数学教学策略的理论与实践研究（2006-R-2524）
作者简介：刘秀梅（1963—），女，吉林永吉人，副教授，主要从事数学分析、数学教育研究．

题经过逻辑的推论证明出来的具有真实性的命题. 网络作为现代的教学手段为数学分析的教学创设了崭新的教学环境，我们可以采取多样的具有现代特点的教学策略来实施教学，无论是对概念的解读还是定理证明或是具有普遍意义的命题的判断，都需要我们采取适宜的策略来进行教学，达到最优的教学效果.

2.1　概念教学的解读符号及符号语言的策略

数学分析中的概念、命题、定理等都是用数学语言来阐述的，数学语言中最不易理解的是数学符号语言，即用既含有文字又含有符号的语言来表达概念间的逻辑关系，来表述命题、定理的含义. 抽象的符号却代表深刻的含义，因此教学的第一步是解读符号、解读符号语言，阐述符号及符号语言产生的过程，通过网络环境下不同的手段、不同的方式阐述符号的含义，用通俗化语言表述符号语言，用严密的分析手段归纳符号语言，从而让学生理解符号语言. 我们在讲述定积分概念的时候，"特定和式"的表达式$\sum f(\xi)\Delta x_i$ 必须通过带有层次性（分割、代替、作和、取极限）的严密分析得到.

2.2　揭示概念产生的合理性的策略

一个概念的引入必有其合理性和必要性，揭示概念产生的合理性和必要性是理解概念的前提和基础，揭示概念引出的合理性的同时也就给出了概念模型，即概念定义. 在教学时，对具有实际问题背景的概念，应从学生熟悉的事物入手，注重与生活实践相联系，应充分利用网络教学环境，创设模拟的逼真环境，阐述概念抽象、生成的过程，通过"概念形成"的方法，使学生获得概念，在数学分析中，这一类概念很多，如导数、定积分、反常积分、重积分等；对那些为研究数学问题而引入的概念，要注重揭示概念的本质，通过言语分析、层层解剖的方法，如函数极限的"$\varepsilon-\delta$"语言、函数在一点的连续性，函数列的一致收敛等概念，必要时给出注记.

2.3　概念教学的对比分析及类比发现策略

对比是一种比较方法，将相同或不同的事物放在一起作比较，从而找出相同点或不同点. 类比一种推理方法，是从一种事物所具有的性质推测其它事物也可能具有的相同的性质的方法，数学家康德说"每当理智缺乏可靠的论证的思路时，类比这个方法往往能指引我们前进". 数学分析中的知识脉络是由一元到多元，由微分到积分，有很多概念具有一定的相似性，知识点之间联系密切，对比分析和类比发现就是实现知识间转化的好方法，通过对比和类比，我们可以将已有知识与新知识连接起来，接受新知识，构成新知识体系. 如将函数的"$\varepsilon-\delta$"语言与数列极限的"$\varepsilon-N$"语言相类比和对比，将重积分定义与定积分定义相类比，将闭区间上连续函数的性质与闭域上连续函数的性质相类比，将一元函数的泰勒公式与二元函数的泰勒公式相类比，将函数项一致收敛的性质与函数列一致收敛的性质作对比，将二元函数的极限与一元函数的极限作对比，知识脉络变得清晰，变得容易掌握. 并且，可以通过网络环境，将这些类比和对比体现出来，随时调用，随时对比，方便快捷，便于展示，为新知识的学习创造了良好的学习环境.

2.4　概念阐释或定理证明的"产婆术"策略

"产婆术"一词来自于"苏格拉底问答法"，是古希腊著名的哲学家、教育家创立的一种教学方法，"教育者并不教给学生具体的知识，而只是作为知识的产婆而存在，把存在于学生内心的知识导引出来，变为学生的实际知识与技能[2]". 这里所说的产婆术策略是指在"苏格拉底问答法"的基础上，而建立的一种通过师生对话的形式来揭示数学概念的产生、发展的过程，知识并不存于学生脑中，而是通过"产婆"的方法引出应该产生的概念或命题，然后再通过适当的方式给出定义或证明. 这里作为"产婆"的教师需要具备"导引"的技巧，教师要善于抓住知识间的联系与不同，带领学生向预想的新知识方向发展，顺其自然地得出新知识. 这种思想的体现要通过网络工具"分句"出现，即形成"师问"、"生答（含教师导引）"的形式，学生回答的部分即是教师要导引的内容，因此，教师要做到心中有数. 如我们在教学方向导数 $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{\Delta_l f}{\rho}$ 概念时，可设计如下几问，（1）l 有起点和终点吗？（2）ρ 是什么？如何表示？有什么特点？（3）若取 l 为 x 轴正方向，此时函数在 P_0 处的方向导数是什么？若函数在 P_0 处的偏导数存在，情形又如何？（5）若取 l 为 x 轴负方向，此时方向导数又如何？（4）方向导数和偏导数本质相同吗？等问题，突出方向导数概念中需要注意的要点，使学生明确方向导数与偏导数之间是既有联系又有区别的.

2.5　定理证明的目标定向分析综合策略

在数学教学内容中，定理证明是一个难点，在新知识面前，学生对证明的方法、步骤和过程是未知的甚至是陌生的，又加上学时的限制，教师们常省略了分析的过程，而直接给出证明的步骤，教师证到哪，学生看到哪，几乎没有了自己的思想，完全被教师牵着鼻子走，学生们不知证明将走向哪里，听得云里雾里，懵然无知，只能是"看证明"，而不是"理解证明"，更不是"学证明". 如何让学生在教师的引导下掌握证明、掌握证明的方法呢，一是看教师对证明方法的掌握和运用程度，二是看教师的证明思路和分析综合的清晰程度，三是看教师对要证明的目标的引导定向程度. 在网络环境下，教师可以通过以下几步来进行：一、利用网络课件展现目标，即"要证什么？"，出示要证明的问题；二、提出问题："怎么证？"启发学生思考，集思广益，从已知到未知或从未知到已知，在网络课件上出示"分析图"，按步骤呈现提出的问题和得到的结论，引导学生建立新旧知识间的联系，引导学生进行推证，并且在分析讲解中要随时与所要证目标相比较，寻找差距，完成证明. 目标明确，证明的

思路会围绕目标进行，最后达到目标.

正是随着教师对问题的层层引导和分析，才能使学生掌握解决问题的过程和方法，这就是我们常讲的暴露思维过程. 详尽的分析，可以使学生真正体会知识间的内在联系，达到学生对问题本质的真正了解.

2.6 命题证明的模式化方法展现策略

模式是指完成某项工作的程序方式，模式化方法是指在数学解题的过程中所体现出来的固定化的程序，在程序性知识的教学中，往往会使用模式化方法，如在极限证明中的“N”的取法，我们采用的模式是：任给$\varepsilon>0$，考察$|a_n-A|<\cdots<f(n)<\varepsilon$，解出$n>f^{-1}(\varepsilon)$，则可取$N\geqslant[f^{-1}(\varepsilon)]$，一定满足$|a_n-A|<\varepsilon$，即找到了$N$（$f(n)$表示含有$n$的解析式）. 这种方法不仅适用于数列极限，也适用于函数极限的证明，还适用于如一致连续、一致收敛问题中关于极限的证明. 网络环境下，可以将模式化方法的程序展现在问题的一侧，引导学生在模式化方法的指引下，按照程序完成解决问题的过程.

2.7 命题判断的几何模型辅助策略

数学分析中的很多概念是需要几何模型来辅助的，有了几何模型的辅助，更容易理解概念，掌握概念. 函数绘图程序、曲面绘图程序的使用，为实施传统的数学分析教学内容提供了新的技术手段，使我们可以在课堂上展现以前来不及绘制或根本无法绘制的函数或曲面图像，开阔了学生的眼界，为学生顺利学习并掌握概念提供了直观的图像，以网络做工具，将做好的函数图像置于课件或网络上，学生可以随时查阅，仔细研究，深刻体会.

我们知道，二元函数的图像是空间曲面，由于二元函数的复杂性，用“描点作图”的方法来画二元函数的图像是根本不可能的，将画好的图像展示出来，使学生加深印象，用作图软件，画出二元函数$f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$（如图1）及$f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$（如图2），再来考察其性质就比较好判别了. 如极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$，当取$y=kx^3$，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx^3}}\dfrac{x^3\cdot kx^3}{x^6+k^2x^6}=\dfrac{k}{1+k^2}$，所以此二元函数在$(0,0)$的极限不存在，从图上可以看到此函数在原点处的几何特征. 而极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sin\sqrt{x^2+y^2}$存在，为0.

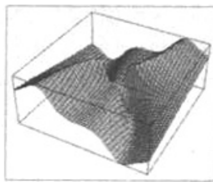


图1 函数图像（一）

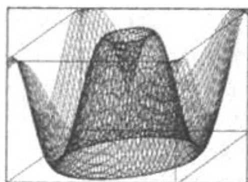


图2 函数图像（二）

以上仅从几个不同的角度探讨了网络环境下教学内容的组织和实施策略，在教学中还需要进一步探索和研究，寻找最佳的教学策略，以达到教学最优化.

[参考文献]

[1] 陈琦，刘儒德. 当代教育心理学[M]. 北京：北京师范大学出版社，1997.

[2] 胡金平. 中外教育史纲[M]. 南京：南京师范大学出版社，2004.

Organizing and Implement Tactics of Mathematics Teaching Content of Teachers' College under Network Environment

LIU Xiu-mei

(Department of Mathematics, Lianyungang Teachers College, Jiangsu Lianyungang 222006, China)

Abstract: Under network environment, the organizing of mathematics teaching content of teachers' college should make full advantage of network resource, and courseware of the nature of mathematics should be constructed according to organizing tactic. Painstaking implement tactics, such as interpreting symbols, revealing concept, analogy, contrasting, socratic method, goal orientation, hipping method, of different of teaching contents including concept, theorem, and proposition, could accomplish teaching optimum under network environment.

Key words: the network environment; mathematics teaching content; organization and implement; strategy

[责任编校：周学智]